Math. P. 253 1e

Killing

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Einführung

in die

Grundlagen der Geometrie.

Von

Dr. Wilhelm Killing,

Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster i. W.

Zweiter Band.

Mit 8 Figuren im Text.

Paderborn.

Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.

1898.

Zweigniederlassungen in **Münster, Osnabrück** und **Mainz.**

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Nachdem der erste Band meiner »Einführung in die Grundlagen der Geometrie« im Herbst 1893 erschienen ist, wird es mir erst jetzt möglich, den zweiten Band folgen zu lassen und dadurch das Werk zum Abschlufs zu bringen. Ich kann aber versichern, dafs ich in der Zwischenzeit, soweit es eine anstrengende Lehrthätigkeit gestattete, nach Kräften bemüht gewesen bin, zur Klarstellung der einschlagenden Fragen beizutragen. Dennoch darf der Leser keineswegs erwarten, überall abschliefsende Untersuchungen zu finden. In dieser Hinsicht besteht zwischen den beiden Bänden ein wesentlicher Unterschied. Im ersten Bande kam es darauf an, die Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen (im engern Sinne) zu beweisen, über die verschiedenen Möglichkeiten einen Überblick zu gewinnen und die hiernach für drei Dimensionen erhaltenen Resultate auf eine beliebig hohe Zahl von Dimensionen zu übertragen; der Erledigung dieser Probleme stehen principielle Schwierigkeiten nicht mehr entgegen. Ganz anders steht es mit den Fragen, die im vorliegenden Bande erörtert werden. Nur die Projektivität ist sowohl in ihrem selbständigen Aufbau als auch in ihrer Beziehung zur Metrik als abgeschlossen zu betrachten. Im übrigen konnte es aber nur meine Aufgabe sein, einen Überblick über die bisherigen Untersuchungen zu geben, um den Leser in den Stand zu setzen, zwischen sicheren und zweifelhaften Resultaten zu unterscheiden und den Punkt zu erkennen, an dem weitere Forschungen anzusetzen haben, wenn sie einen endgültigen Erfolg in Aussicht stellen sollen.

Von welchen Grundlagen man in der Geometrie ausgehen will, wird in etwa stets Sache besonderer Vorliebe sein; nur mufs man verlangen, dafs nicht willkürlich Wissenszweige von einander getrennt werden, die ihrer Natur nach eng zusammengehören.

Mag manchem in meinen »Grundsätzen der Geometrie« die Rücksichtnahme auf die Erfahrung weniger gefallen, mag man es tadeln, dafs von ihnen aus der Aufbau nicht systematisch durchgeführt ist, jedenfalls wird man anerkennen müssen, dafs sie auf ein einheitliches Gebiet führen; in der That tritt die nahe Verwandtschaft aller einzelnen Zweige, die wir im weiteren Sinne als Raumformen bezeichnen, von mehr als einer Seite zu Tage. Unter ihnen sind aber drei von hervorragender Wichtigkeit: die parabolische, die hyperbolische und die elliptische Geometrie, von denen jede wieder auf eine grofse Reihe einzelner Raumformen führt. Diese drei Grundformen treten in unseren Untersuchungen stets gleichberechtigt auf, mag man (im ersten Abschnitt) von Euklids System oder (im zweiten und sechsten Abschnitt) von den projektiven Eigenschaften ausgehen. Ja, wenn wir im achten Abschnitte die eigentlichen Raumformen den allgemeinen gegenüber charakterisieren wollen, so gelangen wir immer wieder zu diesen drei Formen, ohne eine unter ihnen bevorzugen zu können. Wer es versuchen wollte, allgemeine Eigenschaften aufzustellen, die ihn durch blofse Rechnung etwa nur auf die euklidische Geometrie führen könnten, würde sich sicherlich vergebens bemühen. So schliefst das Ende meines Buches wieder an den Anfang an; die Gleichberechtigung der genannten drei Formen tritt uns auf den verschiedensten Wegen mit unabweislicher Notwendigkeit entgegen.

Möge das Werk auf dem vielleicht undankbaren, aber zweifellos wichtigen Gebiete, dem es gewidmet ist, zur Verbreitung der bereits gesicherten Kenntnisse beitragen und zu weiteren Forschungen anregen!

Münster, Weihnachten 1897.

Wilhelm Killing.

Inhalts-Verzeichnis.

Die angehängten Ziffern beziehen sich auf den Litteratur-Nachweis.

Fünfter Abschnitt. **Kongruenz und Messung.**

		Seite
§ 1.	Die Gröfsensätze	1
§ 2.	Die Bewegung in der Geometrie der Alten	2
§ 3.	Riemanns Aufbau der Geometrie [1]	6
§ 4.	Die Messung der krummen Linien [2]	15
§ 5.	Die Messung der Flächen [3] [4] [5]	22
§ 6.	Die Messung der Körper [6]	33
§ 7.	Die Messung der geraden Strecke	36
§ 8.	Die Stetigkeit bei Euklid	41
§ 9.	Der Verhältnisbegriff bei Euklid	45
§ 10.	Cantors transfinite Zahlen [7]	49
§ 11.	Eine zweite Erweiterung des Zahlgebietes [8]	53
§ 12.	Veroneses transfinite Zahlen [9]	59
§ 13.	Rückblick	67

Sechster Abschnitt. **Abschlufs der projektiven Geometrie.**

§ 1.	Die Staudt-Kleinschen Voraussetzungen [10]	73
§ 2.	Die idealen Gebilde [11]	81
§ 3.	Der projektive Raum als Ganzes [12]	97
§ 4.	Projektivität und Metrik [13]	112
§ 5.	Projektivität und Bewegung. Elementare Entwicklung	129
§ 6.	Projektivität und Bewegung. Abschliefsende Untersuchung	138
§ 7.	Fanos Begründung der Projektivität [14]	155
§ 8.	Rückblick	159

Siebenter Abschnitt. **Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.**

§ 1.	Vorbemerkungen	166
§ 2.	Der Winkel [15]	168
§ 3.	Über die Ebene und die Gerade als Raumgebilde [16]	173

Seite
§ 4. Die Gerade als die kürzeste Linie[17] [18] 186
§ 5. Fläche, Linie und Punkt 193
§ 6. Wundts Definition des Raumes[19] 198
§ 7. Eine Arbeit Überwegs[20] 204
§ 8. Tillys Grundlagen der Geometrie[21] 208
§ 9. Veroneses Aufbau der Geometrie[22] 214
§ 10. Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie 226
§ 11. Die allgemeinen Raumformen 232

Achter Abschnitt. **Anwendung der Transformations-Gruppen.**

§ 1. Überblick über die Theorie der Transformations-Gruppen[23] . . 243
§ 2. Beispiele von Transformations-Gruppen 253
§ 3. Invarianten von Transformations-Gruppen[24] 263
§ 4. Die Invariante in einem besonderen Falle[25] 269
§ 5. Über die Gruppen, welche einer in den Differentialen homogenen linearen Gleichung genügen 288
§ 6. Über die Gruppen, welche einer in den Differentialen quadratischen Gleichung genügen[26] 296
§ 7. Zusammenhang zwischen den allgemeinen Raumformen und den Transformations-Gruppen[27] [28] [29] 314
§ 8. Helmholtz' Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen[30] . 329
§ 9. Lies Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie[31] . . 335
§ 10. Eine andere Charakterisierung der eigentlichen Raumformen[32] . 339
§ 11. Rückblick . 347
Litteratur-Nachweis 355

Fünfter Abschnitt.

Kongruenz und Messung.

§ 1.

Die Gröfsensätze.

Nach der Heibergschen Ausgabe sind von denjenigen Sätzen, welche in den meisten Bearbeitungen von Euklids Elementen als Grundsätze (κοιναὶ ἔννοιαι) zusammengestellt werden, nur fünf als echt anzusehen, nämlich die folgenden:

1. Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind einander gleich.

2. Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.

3. Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, so bleiben gleiche Reste.

4. Dinge, die mit einander zur Deckung gebracht werden können, sind einander gleich.

5. Das Ganze ist gröfser als sein Teil.

Die Gröfsensätze werden von Euklid sehr häufig angewandt; man hat aber zu unterscheiden, ob die Anwendung zum Wesen des Beweises gehört oder überflüssiges Beiwerk ist. In den Sätzen über die Flächengleichheit sind die Gröfsensätze für Euklid von wesentlicher Bedeutung. So hat man für den Hauptsatz dieser Theorie, nämlich für den Satz, dafs Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe gleichen Inhalt haben, von einer Figur kongruente Bestandteile abzutrennen und dann den dritten Grundsatz anzuwenden. Zuweilen beruhen auch geometrische Beweise vollständig auf Gesetzen der Algebra. Ich erinnere an den bekannten Beweis des Satzes, dafs der Peripheriewinkel im Kreise

die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Centriwinkels ist; hier ist das Wesen des Beweises in der algebraischen Formel: $\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$, zu suchen. Aber Euklid benutzt die Gröfsensätze zuweilen auch, wenn ihre Anwendung durchaus überflüssig ist. Betrachten wir z. B. seinen Beweis für den Satz, dafs im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Basis gleich sind; wenn im Dreieck ABC die Seiten AB und AC gleich sind, so verlängert er diese Seiten um gleiche Strecken BD und CE und beweist zuerst die Kongruenz der Dreiecke ABE und ACD, dann die Kongruenz der Dreiecke BCD und CBE. Zwar liefert jetzt die Subtraktion gleicher Winkel das gewünschte Resultat; aber schon bei der ersten Kongruenz gelangen diejenigen Winkel zur Deckung, deren Gleichheit bewiesen werden soll.

In vielen Fällen endlich verdunkelt die Benutzung der Gröfsensätze geradezu das Wesen der Beweise. Es würde zu weitläufig sein, alle hierher gehörigen Sätze anzuführen; ich verweise nur auf die Propositionen 13, 14, 15 des ersten Buches, worin u. a. gezeigt wird, dafs die Summe zweier Nebenwinkel zwei Rechte beträgt. Abgesehen davon, dafs die Art der Beweisführung den Anfänger geradezu abstofsen mufs, tritt das Wesen der Beweise hinter überflüssigem Beiwerk ganz zurück.

§ 2.

Die Bewegung in der Geometrie der Alten.

1. Neben den eigentlichen Gröfsensätzen gebraucht Euklid das Princip der Deckung. Hierüber spricht er sich nicht näher aus; auch das stets gebrauchte Wort ἐφαρμόζειν, welches dem lateinischen *applicare* der Bedeutung nach wohl am nächsten steht, vermag an sich keine Klarheit zu gewähren. Wir müssen uns daher diejenigen Stellen näher ansehen, an denen Euklid die Deckung benutzt. Schon der vierte Grundsatz: »Dinge, die einander decken, sind einander gleich«, macht von der Deckung Gebrauch, und da die Deckung nur durch Bewegung herbeigeführt werden kann, hat man schon aus dieser Stelle schliefsen wollen, Euklid habe mit vollem Bewufstsein die Bewegung in der Geometrie benutzt. Wer diese Folgerung schon aus dem angeführten Axiom zieht, wird in seiner Auffassung ganz gewifs durch den

Beweis des ersten Kongruenzsatzes für das Dreieck, der vierten Proposition im ersten Buche, bestärkt. Bei der Wichtigkeit dieser Stelle glaube ich sie im Urtext mitteilen zu sollen; sie lautet:

Ἐφαρμοζομένου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ κ. λ.

Euklid giebt also dem Dreieck *ΑΒΓ* eine andere Lage und setzt voraus, dafs sich dadurch die Gröfse der Seiten, der Winkel und des Inhalts nicht ändert. Er gebraucht das Wort *τιθέναι*, will also eine wirkliche Bewegung vornehmen und bestimmt die neue Lage, welche durch die Bewegung erhalten wird, dadurch, dafs 1. der Punkt *Α* auf *Δ*, 2. die Gerade *ΑΒ* in die Richtung *ΔΕ* und 3. das Dreieck *ΑΒΓ* auf *ΔΕΖ* fällt.

Auch an einigen anderen Stellen wird die Bewegung benutzt; so wird im Beweise der 24. Proposition des dritten Buches ein Kreis und zuweilen in den letzten Büchern ein Körper bewegt.

2. Hiermit dürften alle diejenigen Fälle erschöpft sein, an denen Euklid die Bewegung ausdrücklich erwähnt; es könnte also scheinen, als ob sie in Euklids System nur von untergeordneter Bedeutung wäre. Ganz anders aber wird unser Urteil lauten, wenn wir die Rolle beachten, die die angeführten Sätze in den Elementen spielen. Aus dem ersten Kongruenzsatze werden die übrigen Bedingungen für die Kongruenz von Dreiecken hergeleitet. Diese Sätze dienen alsdann dazu, die Lehre von den parallelen Linien zu begründen; auch im weiteren Verlaufe des Werkes, bei der Lehre vom Parallelogramm, vom Kreise, selbst in der Stereometrie, wird die Kongruenz der Dreiecke aufserordentlich oft angewandt. Wollte man aus Euklids Elementen alle Sätze weglassen, deren Beweise entweder direkt oder durch Zwischenstufen den ersten Kongruenzsatz benutzen, so würde kaum etwas übrig bleiben. Nun stützt sich dieser Satz in seinem Beweise auf die Bewegung; also ist bei Euklid die Bewegung eine wesentliche Grundlage der Geometrie. Denn die Bedeutung eines Begriffes hängt nicht davon ab, ob derselbe in vielen Fällen mit klaren Worten angeführt wird, sondern ob er, wenn auch nur indirekt, einen wesentlichen Bestandteil der Beweise ausmacht.

3. Auch die übrigen griechischen Mathematiker haben keines-

wegs die Bewegung grundsätzlich aus der Geometrie verbannt. Es genüge, einige Beispiele anzuführen, auf die mich Herr M. Cantor, der doch die Geschichte der Mathematik wie kein zweiter beherrscht, freundlichst aufmerksam gemacht hat. (Ich verweise in den eingeklammerten Citaten auf die erste Auflage seiner Geschichte der Mathematik.) Plato bringt (I. 195) die Verdoppelung des Winkels durch Verschiebung eines gewissen Apparates hervor; Archimedes (I. 257) findet in ähnlicher Weise eine Sehne, deren Verlängerung bis zu einer festen Geraden eine gewisse Länge besitzt; das Mesolabium (I. 285) ist ein Werkzeug der Bewegungsgeometrie, ebenso das sich drehende Lineal Herons (I. 317). Mit Recht hebt ferner Herr Cantor mir gegenüber brieflich hervor, dafs der Kreis, der in den Konstruktionen eine so hervorragende Rolle spielt, nur durch Bewegung hervorgebracht wird; er erinnert an die Konchoide des Nikomedes, an die Spiralen und manche andere Kurve.

4. Dabei mufs es sehr auffallend erscheinen, dafs die griechischen Philosophen, soweit ich die Sache übersehen kann, darin übereinstimmen, die Bewegung aus der Geometrie vollständig zu verbannen. Überall wird versichert, die Geometrie befasse sich mit den Körpern, soweit sie als unbeweglich vorausgesetzt würden. Nur an solchen Stellen, wo man die Astronomie zu den mathematischen Wissenschaften rechnet, wird auch die Bewegung als Gegenstand der Mathematik erwähnt; jedesmal aber, wenn man die Astronomie ausschliefst und die Arithmetik und die Geometrie als die einzigen Zweige der Mathematik bezeichnet, heifst es, die Bewegung gehöre der Mathematik nicht an. In diesem Sinne sagt Aristoteles, die Mathematik habe es mit dem Unbeweglichen und Ruhenden zu thun, zwar nicht mit dem an und für sich Unbeweglichen, sondern nur insofern es an der Materie hafte. Derselbe Philosoph erblickt gerade hierin einen besondern Vorzug unserer Wissenschaft: nach der Metaphysik, die bei ihm am höchsten steht, weist er der Arithmetik den ersten Platz an, da sie sich mit der blofsen Zahl befasse; dann kommt für ihn die Geometrie als diejenige Wissenschaft, welche nur den Ort, die mefsbare Gröfse, berücksichtige und die Bewegung ausschliefse; den folgenden Platz weist er der Astronomie zu, in der die natürlichen Bewegungen untersucht werden.

5. Hiernach besteht ein Gegensatz zwischen der Auffassung der alten Philosophen und der Art, in der die griechischen Mathematiker die Geometrie behandelt haben. Wir wissen aber nicht, ob dieser Gegensatz zum Ausdruck gebracht oder auch nur in voller Klarheit erkannt ist. Die Mathematiker aus der Blütezeit der griechischen Geometrie gehen auf die vorliegende Frage in den uns hinterlassenen Schriften nirgends ein. Proklus bespricht allerdings die Beziehung der Bewegung zur Geometrie; aber einerseits kann er als vollwichtiger Zeuge nicht angesehen werden, andererseits beruft er sich nur auf Philosophen und nicht auf Mathematiker. Indessen sollte man denken, dafs er die abweichende Meinung eines Mathematikers mitgeteilt hätte, wofern sie ihm bekannt geworden wäre. Auch würden die alten Philosophen ohne Zweifel in ihren Schriften auf den Widerspruch eingegangen sein, der von den Mathematikern gegen ihre Ansicht erhoben wäre. Hiernach scheint es, als habe sich kein Mathematiker des Altertums gegen die angeführte Meinung der Philosophen ausgesprochen. Das wird man um so eher annehmen dürfen, da Ptolemäus in der Einleitung zum Almagest der von Aristoteles gegebenen Begrenzung der einzelnen Wissenschaften vollständig zustimmt; wenn er dabei der Mathematik auch die Lehre von den Bewegungen zuweist, so mufs man bedenken, dafs er die Astronomie als einen Zweig der Mathematik betrachtet.

6. Diese Sachlage legt es nahe, folgende Hypothese aufzustellen: Die Alten hatten die Ansicht, dafs die Bewegung der Geometrie fremd sei. Da es aber unmöglich war, die Bewegung beim Beweise der geometrischen Sätze zu entbehren, so suchte man ihre Anwendung möglichst einzuschränken. Vielleicht hoffte man, sie allmählich ganz verbannen zu können und dann das Ideal zu erreichen, das man der Geometrie gesteckt hatte.

Ob diese Annahme begründet ist, wage ich nicht zu entscheiden. Gewifs liefse sich manches zu ihrer Verteidigung sagen; aber man wird ebenso berechtigt sein, dem folgenden Gedanken beizustimmen: Bei der Art, in der die Alten die Geometrie behandelten, ist die Bewegung nicht zu entbehren; da sie aber im übrigen ein sehr tiefes Verständnis für die Grundlagen der Mathematik bekunden, ist kaum anzunehmen, dafs sie betreffs der Bewegung durch eine vorgefafste Meinung sollten im Irrtum gehalten sein.

7. Hier möge es gestattet sein, eine kleine pädagogische Bemerkung beizufügen. Indem die Alten, statt die Bewegung direkt zu benutzen, in ihren Beweisen, wo es irgend möglich war, auf den ersten Kongruenzsatz für Dreiecke zurückgingen, wurden die Beweise aufserordentlich kompliziert, und ihr Kernpunkt trat vielfach ganz hinter blofsem Beiwerk zurück. Dadurch dafs die neuere Zeit mit dieser Methode gebrochen hat, ist bereits eine wesentliche Vereinfachung der Beweise erreicht. Was die systematische Benutzung der Bewegung zu leisten vermag, ersieht man aus Petersens »Methoden und Theorieen zur Auflösung geometrischer Konstruktions-Aufgaben«. Indessen vererben leider manche Beweise ihre hergebrachte Form auch dann, wenn eine Vereinfachung recht gut möglich ist. Der Lehrer wird gut thun, nach dieser Richtung hin eine sorgfältige Prüfung vorzunehmen. Ich scheue mich nicht, meine Überzeugung dahin auszusprechen, dafs es kaum ein Mittel giebt, dem Schüler das Verständnis der geometrischen Sätze und ihrer Beweise zu erleichtern, als wenn man ihn zwingt, die zu Grunde liegenden Bewegungen wirklich auszuführen.

§ 3.

Riemanns Aufbau der Geometrie.

Hier scheint mir die geeignete Stelle zu sein, um die schon früher (III. § 10. B. 1. S. 210—217) erwähnte Arbeit Riemanns: »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, einer kurzen Prüfung zu unterziehen. Zu dem Ende müssen wir kurz den Inhalt dieser Arbeit angeben.

Im ersten Abschnitt setzt Riemann einen Begriff voraus, der den beiden Bedingungen genügt: a) er läfst verschiedene Bestimmungsweisen zu, b) unter diesen Bestimmungsweisen findet von einer zur andern ein stetiger Übergang statt. Einen solchen Begriff bezeichnet Riemann als eine stetige Mannigfaltigkeit und nennt jede einzelne Bestimmungsweise einen Punkt. Geht man in irgend einer derartigen Mannigfaltigkeit von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern über, so wird die Gesamtheit der durchlaufenen Bestimmungsweisen als eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bezeichnet. Diese Mannigfaltigkeit läfst Riemann wieder in eine andere, völlig verschiedene übergehen

und gelangt zur zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, sowie durch Fortsetzung zur n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit für irgend eine Zahl n. Ist aber umgekehrt das Gebiet einer Veränderlichkeit gegeben, so nimmt er darin eine stetige Funktion des Ortes an und zwar eine solche, die nicht für einen Teil der Mannigfaltigkeit konstant ist. Jedes System von Punkten, für welche die Funktion einen konstanten Wert hat, bildet dann eine stetige Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit n-fach ausgedehnt ist. So glaubt Riemann das wesentliche Kennzeichen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit darin zu sehen, dafs sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Gröfsenbestimmungen zurückführen läfst.

Der zweite Abschnitt handelt von den Mafsverhältnissen, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist. Riemann selbst bezeichnet diese Untersuchung als sehr unvollständig, hofft aber, dafs sie für seinen nächsten Zweck ausreichend sei. Er geht von der Voraussetzung aus, dafs jede Linie durch jede mefsbar sei. Irgend ein Punkt der Linie habe die Koordinaten $x_1 \ldots x_n$, ein anderer die Koordinaten $x_1 + h_1 \ldots x_n + h_n$. Nachdem der erste Punkt beliebig angenommen ist, kann man den zweiten so wählen, dafs die Gröfsen $h_1 \ldots h_n$ (die Änderungen der Koordinaten) sämtlich beliebig klein werden, etwa absolut genommen unter einer Gröfse δ bleiben. Zwischen den Punkten $(x_1 \ldots x_n)$ und $(x_1 + h_1 \ldots x_n + h_n)$ nehme man einen weiteren Punkt $(x_1 + h_1' \ldots x_n + h_n')$ an; dann sollen auch die Gröfsen $h_1' \ldots h_n'$ absolut genommen kleiner sein als δ. Jetzt betrachtet Riemann nur solche Linien, welche einer gewissen Beschränkung unterliegen. Nachdem die Gröfse δ passend gewählt ist, soll es bei jeder Wahl einer beliebig kleinen Gröfse ε möglich sein, jedes Verhältnis $h_1 : h_2 : \ldots : h_n$ dem entsprechenden Verhältnis $h_1' : h_2' : \ldots h_n'$ bis auf einen Unterschied ε gleich zu machen, wofern nur der dritte Punkt zwischen den beiden ersten gewählt wird. Diese Beschränkung kommt auf folgendes hinaus: man kann die Linie in Elemente zerlegen; wenn dann $x_1 \ldots x_n$ die Koordinaten für den Anfangspunkt eines Elementes, $x_1 + dx_1 \ldots x_n + dx_n$ die Koordinaten für irgend einen anderen Punkt in demselben Elemente sind, so sollen die Verhältnisse $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n$ für alle Punkte des Elementes (bis

auf unendlich kleine Gröfsen) konstant sein. Für alle Linien, die dieser Voraussetzung genügen, wird das Linienelement ds eine Funktion von $x_1 \ldots x_n$ und $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ sein.

Die gemachte Voraussetzung ermöglicht es, die Gröfsen $dx_1 \ldots dx_n$ nach demselben Verhältnis wachsen zu lassen; demnach fordert Riemann, dafs auch die Länge ds des Elementes nach demselben Verhältnis wachse. Dieser Forderung genügt man durch die Festsetzung, dafs die m^{te} Potenz des Linienelementes eine stets positive Form m^{ten} Grades in den Gröfsen $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ ist, wo m eine gerade Zahl sein soll. Die einfachste Voraussetzung würde demnach sein:

$$ds^2 = \Sigma a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}},$$

wo die Koefficienten $a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ entweder Konstante oder Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind und wo die rechte Seite nur verschwindet, wenn $dx_1 \ldots dx_n$ sämtlich gleich null sind, während sie für jede andere Wahl von $dx_1 \ldots dx_n$ positiv ist, welche Werte von $x_1 \ldots x_n$ man auch in die Koefficienten $a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ einsetzt.

Riemann behandelt nur diese einfachste Annahme und gelangt zu einem gewissen analytischen Ausdruck, den er als das Krümmungsmafs bezeichnet. Hierauf brauchen wir aber hier nicht näher einzugehen; es genüge, auf unsere früheren Darlegungen zu verweisen (B. 1. S. 213 ff.).

Die hier skizzierte Schrift ist für die Mathematik von weittragender Bedeutung geworden, indem die darin angedeuteten Gedanken zu ganz hervorragenden Arbeiten angeregt haben. Indessen liegt der Schwerpunkt dieser Arbeiten auf dem Gebiete der Analysis. Dabei darf die Wichtigkeit des Riemannschen Vortrages für die Geometrie nicht unterschätzt werden, da er erstens überaus anregend gewirkt hat und zweitens die Möglichkeit eines unbegrenzten, aber zugleich endlichen Raumes gezeigt und die Grundeigenschaften jener Raumform angegeben hat, die wir im vorliegenden Werke nach Riemann benennen. Diese hohen Vorzüge der Arbeit dürfen uns nicht hindern, die darin entwickelte Grundlage der Geometrie einer sorgfältigen Kritik zu unterziehen.

1. Auf das Schlufsergebnis des ersten Abschnittes, wonach das Wesen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit darin erblickt wird, dafs sich die Ortsbestimmung auf n Gröfsenbeziehungen zurückführen läfst, will ich nicht ausführlich eingehen. Ich verweise

auf den zweiten Paragraphen des dritten Abschnitts (B. 1. S. 168), wonach dies Resultat nicht richtig ist, wofern man nicht voraussetzt, dafs die Zuwendung stetig sein soll. Eingehender handelt von der Darstellung der Punkte einer Mannigfaltigkeit durch Wertsysteme (Koordinaten) eine soeben erschienene Arbeit des Herrn Burkhardt.[1])

2. Die Voraussetzung, welche Riemann an die Spitze des zweiten Abschnitts stellt, dafs jede Linie durch jede andere mefsbar sei, ist unzulässig. Denn, wie man aus den Darlegungen des dritten Paragraphen im dritten Abschnitt (B. 1. S. 172) folgern kann, giebt es in jeder zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit Linien, deren Länge nicht gemessen werden kann. Indessen hat dieser Umstand, der Riemann selbst wenigstens später bekannt gewesen ist, für die Arbeit selbst keinen Belang, da nur Linien betrachtet werden, die in ihrer analytischen Darstellung gewissen Bedingungen genügen und deshalb mefsbar sind. Dagegen scheint mir ein anderer Punkt von gröfserer Bedeutung zu sein. Riemann selbst sagt im ersten Abschnitt seiner Abhandlung (I, 1): »Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Gröfsen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Gröfse als Mafsstab für die andere fortzutragen.« Hiernach ist das Messen keine Grundoperation der Geometrie, indem es eine andere Operation, nämlich die Bewegung, benutzt. Da Riemann diese Überzeugung hatte, durfte er auch nicht vom Ausdruck für das Linienelement ausgehen, sondern mufste allgemeine Gesetze für die Bewegung aufstellen, diese in eine analytische Form bringen und darauf seine weitere Entwicklung stützen. Bei dem Wege, den Riemann einschlägt, sind wir nicht sicher, dafs die an sich willkürlich angenommene Form des Linienelementes mit den Gesetzen der Bewegung vereinbar ist.

3. Riemann will den ganzen Inhalt der Geometrie aus dem Begriffe des Linienelementes herleiten, und es ist nachträglich vielfach als sein besonderes Verdienst gerühmt worden, dafs er die gesamte Geometrie auf ein einziges Princip zurückgeführt habe. Das ist aber etwas durchaus Unmögliches: denn die Analysis kann über einen ihr gegebenen Begriff nicht hinausgehen, die Geometrie bedarf aber noch weiterer Begriffe, welche von dem der Länge einer Linie wesentlich verschieden sind. Sie

mufs zwei-, drei- und mehrdimensionale Gebilde messen; sie mufs die Lage von Gebilden, die nicht zusammenfallen, mit einander vergleichen und bedarf zu dem Zweck u. a. des Winkels. Der Analysis fehlt jedes Mittel, diese Begriffe zu entwickeln oder in innern Zusammenhang mit dem Begriff der Länge zu bringen. Dennoch spricht Riemann selbst vom Flächeninhalt eines Dreiecks, andere geben z. B. Formeln für die Winkel; es ist klar, dafs das nur willkürliche Festsetzungen, nicht aber Folgerungen aus den gegebenen Prämissen sein können.

In der That sind es vorzüglich zwei Methoden, nach denen diese Formeln gewonnen werden. Gewöhnlich läfst man sich durch blofse Analogie leiten. Ein n-dimensionales Gebilde wird in einem $(n + m)$-fach ausgedehnten euklidischen Raume vorausgesetzt. Zur Untersuchung dieses Raumes benutzt man $n + m$ Gröfsen $y_1, y_2 \ldots y_{n+m}$, welche das Analogon der rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten bilden. In diesen Koordinaten kann man die Ausdrücke für Winkel, Inhalt u. s. w. dadurch erhalten, dafs man die bekannten für den dreidimensionalen euklidischen Raum geltenden Formeln auf $n + m$ Variabele überträgt. Um hieraus die entsprechenden Formeln für das n-dimensionale Gebilde zu erhalten, drückt man die Gröfsen $y_1 \ldots y_{n+m}$ durch n Variabele $x_1 \ldots x_n$ aus, setzt also $y_1 \ldots y_{n+m}$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ voraus. Dann wird man auch die Formeln für den Inhalt, für Winkel u. dgl. durch die Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ darstellen, wenigstens so lange man sich auf unendlich kleine Gebiete beschränkt. Alle diese Ausdrücke treten in auffallend enge Beziehung zu der Form, welche das Linienelement für die n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ annimmt. Man hält sich deshalb für berechtigt, diese analytischen Formeln mit denjenigen geometrischen Begriffen, denen sie bei dem gewählten Ausgange entsprechen, ganz allgemein zu verbinden. Indessen kann auf diese Weise die Grundlage der Geometrie nicht gewonnen werden, da man einerseits bereits die Geometrie benutzt, um gewisse Formeln zu erhalten, andererseits die Ausdrücke durch blofse Analogie, nicht aber durch naturgemäfse Entwicklung erlangt werden. (Selbstverständlich hat es kein Bedenken, diese Methode zu befolgen, wenn es sich um rein analytische Entwicklungen handelt und

man die Sprache der Geometrie nur als kurze Bezeichnung für gewisse Formeln benutzt.)

Natürlicher ist eine andere Methode, die auch wir im dritten Abschnitt eingeschlagen haben. Gewisse Differential-Ausdrücke stehen mit dem Ausdruck für das Linienelement in organischem Zusammenhange; ihnen allen mufs also auch eine von der analytischen Darstellung unabhängige Bedeutung zukommen, sie dürfen geradezu mit geometrischen Gebilden identifiziert werden. Bei gewissen Formen, die wir für das Linienelement aufstellen können, giebt es Scharen von Transformationen, bei denen jener Ausdruck ungeändert bleibt; alle diese Transformationen lassen aber noch weitere Ausdrücke ungeändert; demnach hält man sich für berechtigt, auch mit den neuen Formeln einen geometrischen Begriff zu verbinden. Aber auch hier geht man über das Linienelement hinaus; man betrachtet die Transformationen als das Ursprüngliche und stellt den Ausdruck für das Linienelement mit anderen Ausdrücken auf dieselbe Stufe. Dadurch verläfst man den von Riemann vorgezeichneten Weg und nähert sich derjenigen Methode, bei welcher die Bewegung zur Grundlage gemacht wird.

4. Wäre der Grundgedanke der Riemannschen Arbeit richtig, wäre der Ausdruck für das Linienelement wirklich das Charakteristische für jede Raumform, so müfste die bei der Darstellung dieses Ausdrucks benutzte Zahl m das erste und wichtigste Unterscheidungsmerkmal der Raumformen abgeben, wobei vorausgesetzt wird, dafs die m^{te} Potenz des Linienelementes als homogene Form m^{ten} Grades in den Differentialen der Variabeln sei. Indem man versucht, für irgend ein gerades m die weiteren Entwicklungen durchzuführen, mufs man unterscheiden zwischen denjenigen Folgerungen, welche aus dem aufgestellten Begriff in voller Strenge hergeleitet werden, und denjenigen Sätzen, welche erst nach Einführung neuer Begriffe gewonnen werden können. Wird das Quadrat des Linienelementes durch einen Differential-Ausdruck zweiten Grades dargestellt, so giebt die Geometrie selbst Anleitung, wie man die neuen Begriffe einführen müsse; dagegen wird bei höheren Potenzen die Willkür gröfser sein. Demnach scheint es geboten, sich auf diejenigen Sätze zu beschränken, zu deren Herleitung man nur das Linienelement zu benutzen hat.

Dann finden wir aber die auffallende Thatsache, daſs trotz der Verschiedenheit der Zahl m die geometrischen Sätze ungeändert bleiben.

Wir zeigen dies unter der Annahme, daſs die Koefficienten im Differential-Ausdruck konstant sind, und wählen speciell die Form:

$$(1)\quad ds^m = \Sigma dx_\varkappa^m \qquad \text{für ein gerades m.}$$

Die Gleichung der kürzesten Linie, welche zwischen zwei Punkten x' und x'' möglich ist, ergiebt sich aus der Bedingung, daſs die Variation des Integrals

$$\int_{x'}^{x''} \sqrt[m]{\Sigma dx_\varkappa^m}$$

zwischen den festen Grenzen x' und x'' für beliebige Variationen $\delta x_1 \dots \delta x_n$ verschwindet. Die bekannten Principien der Variations-Rechnung liefern hierfür die Bedingungen:

$$d\frac{dx_1^{m-1}}{ds^{m-1}} = 0 \;\ldots\; d\frac{dx_n^{m-1}}{ds^{m-1}} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = c_1 : c_2 : \ldots : c_n,$$

wo die Gröſsen $c_1, c_2 \dots c_n$ für die ganze Linie konstante Werte haben. Demnach können wir setzen:

$$(2)\quad x_\varkappa = x_\varkappa' + (x_\varkappa'' - x_\varkappa')t \qquad \text{für } \varkappa = 1, \dots n,$$

wo t unbeschränkt veränderlich ist.

Machen wir jetzt die Koordinaten abhängig von zwei veränderlichen Gröſsen u und v, indem wir setzen:

$$(3)\quad x_\varkappa = a_\varkappa + b_\varkappa u + c_\varkappa v,$$

wo die Gröſsen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ konstante Werte haben sollen, so hat die durch diese Gleichungen dargestellte Fläche die Eigenschaft, daſs jede kürzeste Linie, welche zwei ihrer Punkte mit einander verbindet, ganz der Fläche angehört. Ist nämlich für zwei Wertepaare (u', v') und (u'', v''):

$$x_\varkappa' = a_\varkappa + b_\varkappa u' + c_\varkappa v', \quad x_\varkappa'' = a_\varkappa + b_\varkappa u'' + c_\varkappa v'',$$

so wird die kürzeste Linie, welche durch diese beiden Punkte geht, durch die Gleichungen dargestellt:

$$x_\varkappa = a_\varkappa + b_\varkappa u' + c_\varkappa v' + [b_\varkappa(u'' - u') + c_\varkappa(v'' - v')]t;$$

diese Werte genügen den Gleichungen (3), wenn man setzt:

$$u = u' + (u'' - u')t, \quad v = v' + (v'' - v')t.$$

Allgemein setze man

$$(4)\quad x_\varkappa = a_\varkappa + a_\varkappa' u_1 + a_\varkappa'' u_2 + \ldots + a_\varkappa^{(r)} u_r,$$

wo die Gröfsen u als variabel, die Gröfsen $a_\varkappa$, $a_\varkappa'$. . . als konstant vorausgesetzt werden, und nehme an, dafs die (r+1)-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1' & a_2' & \ldots & a_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(r)} & a_2^{(r)} & \ldots & a_n^{(r)} \end{matrix} \right\|$$

nicht sämtlich verschwinden. Dann gehört jede kürzeste Linie, welche zwei Punkte mit dem Gebilde (4) gemeinschaftlich hat, ganz demselben an. Ebenso fällt jedes zweidimensionale Gebilde, das den Gleichungen (3) genügt, ganz in das r-fach ausgedehnte Gebilde hinein, wofern es drei Punkte mit ihm gemeinschaftlich hat, die nicht derselben kürzesten Linie angehören. Entsprechende Sätze gelten für mehrdimensionale Gebilde, wie man auf dem in III § 8 (B. 1. S. 205 ff.) angegebenen Wege zeigt.

Indem wir jetzt die kürzesten Linien als Gerade, das durch die Gleichungen (4) dargestellte Gebilde als eine r-dimensionale Ebene bezeichnen, können wir folgende Sätze aufstellen:

»Durch zwei Punkte geht immer eine einzige Gerade hindurch.«

»Durch drei Punkte, die nicht in derselben geraden Linie liegen, läfst sich eine einzige zweidimensionale Ebene legen, und durch $r+1$ Punkte, die nicht derselben Ebene von $r-1$ Dimensionen angehören, ist eine einzige r-dimensionale Ebene bestimmt.«

»Eine Gerade fällt ganz in eine Ebene, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemeinschaftlich hat.«

»Hat eine p-dimensionale Ebene für $p<r$ mit einer Ebene von r Dimensionen $p+1$ Punkte gemeinschaftlich, die keiner $(p-1)$-fach ausgedehnten Ebene angehören, so fällt sie ganz in die r-dimensionale Ebene hinein.«

»Durch eine r-dimensionale Ebene und einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt läfst sich eine, und zwar eine einzige Ebene von $r+1$ Dimensionen legen.«

Ebenso folgen jetzt diejenigen Sätze, welche in III § 8 (B. 1. S. 191) über den Schnitt von Ebenen angegeben sind.

Auch der Begriff des Parallelismus kann wieder eingeführt werden, indem man sagt:

»Zwei Ebenen von p und von r Dimensionen heifsen für $p \leqq r$ parallel, wenn sie in einer $(r+1)$-dimensionalen Ebene liegen und keinen Punkt gemeinschaftlich haben.«

Überhaupt können wir den gesamten Inhalt des achten Paragraphen im dritten Abschnitt, soweit er über Ebenen und Gerade handelt (B. 1. S. 191—205), auch von unsern Voraussetzungen aus herleiten. So denke man eine $(n-1)$-dimensionale Ebene durch die Gleichung bestimmt:

$$\Sigma a_\varkappa x_\varkappa = b,$$

und gehe dann zu den Ebenen von weniger Dimensionen über.

Ersetzen wir die Konstanten $c_\varkappa$ durch die aus (2) sich ergebenden Werte, so folgt für die Länge l der geraden Strecke zwischen den Punkten x' und x'' die Gleichung:

$$(5)\quad l = \sqrt[m]{\Sigma(x_\varkappa'' - x_\varkappa')^m}.$$

Man suche jetzt die kürzeste Linie, welche von einem festen Punkte x' nach den Punkten einer Ebene

$$(6)\quad \Sigma a_\varkappa x_\varkappa = b$$

gezogen werden kann. Dann soll der Wert von $\Sigma(x_\varkappa - x_\varkappa')^m$ ein Minimum werden für gegebene Werte von $x_\varkappa'$ und unter der Bedingung, dafs die $x_\varkappa$ der Gleichung (6) genügen. Berechnet man die Gröfse M aus der Gleichung:

$$(7)\quad b = \Sigma a_\varkappa x_\varkappa' + \sqrt[m-1]{\frac{M a_\varkappa^{m+1}}{m}},$$

so ergeben sich die entsprechenden Werte von $x_1 \ldots x_n$ aus den Gleichungen:

$$(8)\quad x_\varkappa = x_\varkappa' + \sqrt[m-1]{\frac{M a_\varkappa}{m}}.$$

Zugleich ist M eine eindeutige Funktion des Abstandes, d. h. der Länge der zwischen dem Punkte x' und der Ebene möglichen kürzesten Linie. Lassen wir demnach den Abstand (oder was dasselbe ist, die Gröfse M) und die Ebene (6) gegeben sein, so ergiebt sich aus (7) eine Gleichung für x', welche eine zur Ebene (6) parallele Ebene darstellt. Somit folgt:

»Alle Punkte, welche von einer (n—1)-dimensionalen Ebene einen festen Abstand haben, liegen auf einer zu ihr parallelen Ebene.«

Speciell sind die Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ die kürzesten Abstände des zu bestimmenden Punktes von den n Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \; . \; . \; . \; x_n = 0$.

In den angegebenen Sätzen tritt die vollste Übereinstimmung mit der euklidischen Geometrie zu Tage. Wir möchten gern den Grund für diese Thatsache näher erörtern; indessen glauben wir darauf an dieser Stelle nicht eingehen zu dürfen.

§ 4.

Die Messung der krummen Linien.

1. Wenn in Euklids System die Benutzung der Gröfsensätze beträchtlich eingeschränkt, die Bewegung aber nicht entbehrt werden kann, so lohnt es sich ohne Zweifel, zu untersuchen, ob nicht vielleicht umgekehrt die Gröfsensätze aus der Kongruenz hergeleitet werden können. Dafs dieser Gedanke nicht neu ist, ergiebt sich aus einer Stelle bei Proklus, welcher erzählt, Apollonius habe geglaubt, einen Beweis für die Axiome Euklids liefern zu können, und zwar auf folgender Grundlage: »Da α dem β gleich ist, nimmt es denselben Raum ein wie dieses; und da β dem γ gleich ist, nimmt es ebenfalls denselben Raum ein; also nimmt α mit γ denselben Raum ein, ist ihm also gleich.« Dieser Gedanke genügt in der That, die Gröfsensätze für gerade Strecken, für Bogen desselben Kreises und für Winkel auf die Kongruenz zurückzuführen. Um aber ganz allgemein zum Ziel zu gelangen, bedarf es weiterer Erwägungen, die wir im folgenden darlegen wollen.[2])

Dabei müssen wir jedoch beachten, dafs eine Vergleichung zweier Gröfsen nach gleich, gröfser und kleiner nur in besonderen Fällen, z. B. bei geraden Strecken, unmittelbar möglich ist, dafs man aber im allgemeinen eine derartige Vergleichung erst anstellen kann, nachdem man sie durch dieselbe Einheit gemessen hat. Bei der Messung beliebiger Gebilde macht man aber (fast regelmäfsig) von der Messung der geraden Strecke Gebrauch. Demnach wollen wir, dem Charakter unserer Entwicklung entsprechend, die Methode, nach der gerade Strecken gemessen werden, als bekannt voraussetzen, ohne sie einer nähern Prüfung

zu unterziehen, und nur die Messung der übrigen Raumgebilde besprechen.

2. Um eine krumme Linie zu messen, welche durch die beiden Punkte A und B begrenzt wird, schieben wir eine endliche Anzahl von Punkten (1, 1), (1, 2) . . . (1, m) auf dem Bogen AB zwischen die Punkte A und B derartig ein, dafs der von den Punkten A = (1, 0) und (1, ι) begrenzte Bogen alle Punkte (1, α) enthält, für welche die Marke α kleiner ist als ι, während auf dem von den Punkten (1, ι) und B = (1, m + 1) begrenzten Bogen diejenigen Punkte (1, β) liegen, für welche die Marke $\beta > \iota$ ist. Nun bezeichne ich die Länge der von den Punkten (1, $\varkappa$) und (1, $\varkappa + 1$) begrenzten Strecke durch $l_{1\varkappa}$ und setze die Summe $l_{10} + l_{11} + \ldots + l_{1m} = L_1$. Indem ich jetzt zwischen irgend zwei Punkte (1, ι) und (1, $\iota + 1$) weitere Punkte in endlicher Anzahl einschiebe und die neuen Punkte zu den früheren hinzunehme, bringe ich sie alle in die Reihe (2, 1), (2, 2) . . . (2, n) nach derselben Regel, welche für die Zahlen (1, α) aufgestellt wurde; auch bezeichne ich den Punkt A jetzt durch (2, 0), den Punkt B durch (2, n + 1). Dann möge die Länge der Strecke [(2, $\varkappa$), (2, $\varkappa + 1$)] gleich $l_{2\varkappa}$ und die Summe $l_{20} + l_{21} + l_{22} + \ldots + l_{2n} = L_2$ gesetzt werden. Durch Einschiebung weiterer Punkte gelange ich der Reihe nach zu weiteren Längen $L_3 \ldots L_\mu \ldots$ Wofern der zu messende Bogen keine geradlinigen Teile enthält, ist stets $L_{\mu+1} > L_\mu$. Demnach nähern sich die Gröfsen L_μ mit wachsendem μ entweder einem bestimmten Grenzwerte, oder sie werden unendlich grofs. Nähert sich die Gröfse L_μ bei jeder Wahl der Teilpunkte demselben endlichen Grenzwerte L, wofern nur die einzelnen Strecken $l_{\mu\varkappa}$ unbegrenzt abnehmen, so stellt die Gröfse L die Länge des Bogens dar.

3. Um zunächst den einfachsten Fall zu erledigen, nehmen wir an, die Kurve habe in allen zwischen A und B gelegenen Punkten Tangenten und Schmiegungsebenen. Dann können die Punkte (μ, $\varkappa$) so gewählt werden, dafs folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

a) die in irgend zwei Punkten (μ, $\varkappa$) und (μ, $\varkappa + 1$) an die Kurve gelegten Tangenten bilden einen Winkel mit einander, der einen fest gewählten, beliebig kleinen Winkel δ niemals übersteigt;

b) die Schmiegungsebenen der Kurve in den Punkten $(\mu, \varkappa)$ und $(\mu, \varkappa + 1)$ schneiden sich unter einem Winkel, der niemals gröfser ist als ein festgesetzter Winkel ε;

c) die in irgend einem Punkte des Bogens (μ, ι), $(\mu, \iota + 1)$ an die Kurve gelegte Tangente ist gegen jede der beiden Tangenten in (μ, ι) und $(\mu, \iota + 1)$ unter einem Winkel geneigt, der kleiner ist als δ;

d) auch die Schmiegungsebene, die in irgend einem solchen Punkte an die Kurve gelegt ist, bildet mit den Schmiegungsebenen in den Punkten (μ, ι) und $(\mu, \iota + 1)$ Winkel, die kleiner sind als ε.

Nun falle der Punkt (μ, ι) mit dem Punkte $(\mu + 1, \varkappa)$ und der Punkt $(\mu, \iota + 1)$ mit dem Punkte $(\mu + 1, \varkappa + \varrho + 1)$ zusammen. Dann projiziere man die Strecken $l_{\mu + 1, \varkappa + \alpha}$ (für $\alpha = 0, 1 \ldots \varrho$) auf die Strecke $l_{\mu\iota}$. Die Summe dieser Projektionen bildet die Strecke $l_{\mu\iota}$ selbst, während der Cosinus des Winkels, den die projizierte Strecke mit der Strecke $l_{\mu\iota}$ bildet, stets gröfser ist als das Produkt $\cos\delta\cos\varepsilon$. Da wir aber für δ und ε feste Gröfsen gewählt haben, die von der Marke ι unabhängig sind, so folgt die Relation:

$$L_\mu < L_{\mu+1} < \frac{L_\mu}{\cos\delta\cos\varepsilon}.$$

Hiernach erhält man für L_μ einen endlichen Grenzwert, da die Winkel δ und ε beliebig klein gewählt werden können.

Dieser Grenzwert wird aber stets erhalten, von welchen Punkten man auch ausgehen mag. So sei man bei der Wahl irgend anderer Punkte zu einer Gröfse $L_{\nu'}$ gelangt, und die Punkte seien in diesem Falle so gewählt, dafs nach Festsetzung zweier beliebig klein gewählter Winkel δ_1 und ε_1 die Hinzunahme weiterer Punkte zu einer Gröfse $L_{\nu'+1}$ führt, für welche die Relation besteht:

$$L_{\nu'} < L_{\nu'+1} < \frac{L_{\nu'}}{\cos\delta_1 \cos\varepsilon_1}.$$

Dann kann man, um $L_{\mu+1}$ zu gewinnen, zu den für L_μ benutzten Punkten alle diejenigen Punkte hinzunehmen, bei deren Anwendung sich die Gröfse $L_{\nu'}$ ergiebt, und ebenso kann man für $L_{\nu'+1}$ zu den für $L_{\nu'}$ benutzten Punkten alle diejenigen Punkte hinzufügen, vermittelst deren man die Länge L_μ erhalten hat. Dadurch wird

$L_{\mu+1} = L_{\nu'+1}$. Man kann daher dieselbe Gröſse $L_{\mu+1}$ sowohl beliebig nahe an L_μ wie an L_ν' bringen; somit haben beide denselben Grenzwert.

4. Hier mögen zwei kurze Bemerkungen gestattet sein. Erstens: man übersieht sofort, daſs die vorstehende Entwicklung ungeändert bleibt, wenn die Kurve eine endliche Zahl von Punkten besitzt, in denen sich keine (festen) Tangenten und Schmiegungsebenen an sie legen lassen; man hat diese Punkte auszuschlieſsen, indem man sie etwa zu Mittelpunkten von Kugeln wählt, nur für die auſserhalb der Kugeln gelegenen Segmente die Längen bestimmt und dann die Radien unbegrenzt abnehmen läſst.

Zweitens wolle man beachten, daſs die Benutzung des Cosinus und damit die Beschränkung auf eine parabolische Raumform nicht notwendig ist. Man kann geradezu die bei der Kreismessung gebräuchliche Methode ihres speciellen Charakters entkleiden und kommt dadurch zu Folgerungen, die für alle Raumformen gültig sind. Indessen glaubte ich die obige Darstellung bevorzugen zu sollen, weil sie sich durch Kürze auszeichnet und weil man unmittelbar übersieht, welche Änderungen angebracht werden müssen, wenn sie auf nicht-euklidische Raumformen übertragen werden soll (vgl. Stolz, math. Ann. B. 18. S. 271 Fuſsnote).

5. Man kann, wie Scheeffer bewiesen hat, den Begriff der Länge auch in vielen Fällen aufstellen, wo die vorangehende Untersuchung nicht zum Ziele führen würde. Namentlich gilt unabhängig von der Annahme über die Existenz von Tangenten folgender Lehrsatz:

Wenn alle Gröſsen L_ν bei irgend einer Wahl der Teilpunkte unterhalb einer festen endlichen Gröſse G bleiben, so bleiben sie auch bei jeder andern Wahl der Teilpunkte unterhalb dieser Gröſse, und L_ν hat für $\nu = \infty$ den von der Wahl der Teilpunkte unabhängigen Grenzwert L.

Irgend einer Wahl der Teilpunkte möge die Reihe $L_1, L_2 \ldots$ entsprechen. Da alle in dieser Reihe vorkommenden Gröſsen kleiner sind als G, und $L_{\mu+1} \geqq L_\mu$ ist, so haben die Gröſsen L_μ eine obere Grenze, der sie sich unbegrenzt nähern, ohne sie zu überschreiten; diese Gröſse sei L.

Einer andern Wahl der Teilpunkte möge die Reihe $L_1', L_2' \ldots$

entsprechen; dann ist zu beweisen, dafs auch diese Reihe einen bestimmten Grenzwert L' besitzt, und dafs L = L' ist.

Die Zahl der Teilpunkte, die zur Erlangung der Gröfse L_ν' benutzt werden, sei p, und sie mögen der Reihe nach mit 1', 2' . . . p' bezeichnet werden. Jedem dieser Punkte $\varkappa' = 1' \ldots p'$ ordne man einen Bogen $s_\varkappa$ zu, der nur den Punkt $\varkappa'$, aber keinen andern Punkt aus dieser Reihe enthält, und der noch folgender Bedingung genügt: Ist die Länge δ beliebig gewählt und sind A, B, C irgend drei Punkte dieses Bogens, so soll stets $AB + BC - AC < \frac{\delta}{p}$ sein. Bei der ersten Reihe $L_1, L_2 \ldots$ mufs einmal, etwa für L_μ, eine Auswahl der Punkte erreicht werden, bei der in jedem so erhaltenen Bogen $s_\varkappa$ mindestens zwei Punkte (μ, α) und $(\mu, \alpha + 1)$ liegen. Indem wir jetzt in der Summe L_μ die Strecke, welche zwei Punkte des Bogens $s_\varkappa$ verbindet, durch die Summe der beiden Strecken ersetzt, welche den Punkt $\varkappa'$ mit jenen beiden Punkten verbindet, erhält L_μ einen Zuwachs, der kleiner ist als δ. Demnach ist

$$L_\mu + \delta > L_\nu'.$$

Umsomehr ist $L + \delta > L_\nu'$, oder da δ beliebig klein angenommen werden kann: $L \geqq L_\nu'$. Demnach nähern sich auch die Gröfsen L_ν' mit wachsendem ν einem bestimmten Grenzwert L', und dieser Wert kann nicht gröfser sein als L. Nun können wir aber in der vorhergehenden Betrachtung die gestrichenen und die ungestrichenen Buchstaben mit einander vertauschen; es ergiebt sich demnach, dafs auch L nicht gröfser ist als L' oder dafs ist: L = L'.

6. Scheeffer zeigt auch, dafs sich in vielen Fällen die Länge bestimmen läfst, wo die Anwendung der gewöhnlichen Regeln nicht ausreicht. Indem wir uns auf eine euklidische Ebene beschränken, legen wir ein rechtwinkliges Koordinaten-System in x und y zu Grunde und nehmen an, y sei zwischen den Grenzen x_0 und x_1 eine eindeutige Funktion f (x) von x. Für den vorliegenden Zweck ist es gut, den Begriff der derivierten Funktion zu erweitern. Nachdem eine positive Gröfse h beliebig angenommen ist, mufs die Gesamtheit der Gröfsen

$$\frac{f(x + h') - f(x)}{h'},$$

wo h' alle zwischen 0 und h liegenden Werte erhält, entweder zwischen zwei endlichen Grenzen verbleiben, oder eine oder beide Grenzen können unendlich grofs werden. Wir können die obere Grenze mit D_h, die untere mit D_h' bezeichnen, indem wir zulassen, dafs eine dieser Gröfsen oder beide unendlich grofs werden. Da nun für $h_1 < h$ stets $D_{h1} \leqq D_h$, und $D_{h'1} \geqq D_h'$ ist, so sind die Grenzwerte

$$\lim_{h=0} D_h = D^+, \text{ und } \lim_{h=0} D_h' = D_+$$

vollständig bestimmt. Scheeffer nennt sie die »vordere obere« und die »vordere untere Derivierte« von f (x). Ebenso definiert er, indem er der Gröfse h einen negativen Wert beilegt, die »hintere obere Derivierte« D^- und die »hintere untere Derivierte« D_- von f (x).

Mit Anwendung dieser Bezeichnungen läfst sich folgender Lehrsatz beweisen:

Wenn die beiden vorderen (oder hinteren) Derivierten der stetigen Funktion f (x) für alle inneren Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' liegen, wo mindestens eine dieser beiden Zahlen endlich ist, so hat die Kurve y = f (x) von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L.

Beim Beweise benutzen wir den bekannten Satz:

Wofern die beiden vorderen Derivierten der stetigen Funktion f (x) an keiner innern Stelle des Intervalls $x_0 x_1$ gröfser sind als die endliche Zahl H, so ist auch der Quotient

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

niemals gröfser als H, welche Punkte des Intervalls man auch für x und x' annehmen mag.

Demnach ist für $G \geqq G'$:

$$G' \leqq \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G.$$

Um zu erkennen, ob die Kurve eine Länge hat, müssen wir der obigen Vorschrift entsprechend die Gröfse bilden:

$$L_\nu = \sum_r \sqrt{(x_{\nu, r+1} - x_{\nu, r})^2 + (y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r})^2}.$$

Wir wählen H als eine endliche positive Gröfse, welche ganz willkürlich ist, wofern G und G' dasselbe Vorzeichen haben,

aber in dem Falle, dafs G und G' verschiedenes Vorzeichen besitzen, nicht kleiner sein darf als der kleinere absolute Wert von G und G'. Jetzt trennen wir die Glieder der Summe L_ν in zwei Gruppen, indem wir diejenigen zur ersten Gruppe rechnen, für welche der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r}}{x_{\nu, r+1} - x_{\nu, r}}$$

höchstens gleich H ist, während wir die übrigen in die zweite Gruppe verweisen. Für die erste Gruppe wenden wir einen, für die zweite zwei obere Striche an. Dann ist:

$$L_\nu' \leqq (x_1 - x_0)\sqrt{1 + H^2}, \text{ und}$$

$$-H(x_1 - x_0) \leqq \Sigma'(y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r}) \leqq H(x_1 - x_0).$$

Die Glieder

$$\Sigma''(y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r})$$

haben sämtlich dasselbe Zeichen; die Summe ist also gleich $y_1 - y_0 - \Sigma'(y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r})$ und ihr absoluter Betrag jedenfalls nicht gröfser als

$$(y_1 - y_0) + H(x_1 - x_0).$$

Demnach wird

$$L_\nu'' \leqq \{(y_1 - y_0) + H.(x_1 - x_0)\}\sqrt{\frac{1}{H^2} + 1}, \text{ und}$$

$$L_\nu = L_\nu' + L_\nu'' \leqq \sqrt{1 + H^2}\left[2(x_1 - x_0) + \frac{(y_1 - y_0)}{H}\right].$$

Da hiernach L_ν stets endlich bleibt, so existiert ein fester Grenzwert L, die Länge der Kurve.

Um ein Beispiel zu bilden, denken wir die Gesamtheit der positiven rationalen Zahlen w_ϱ in folgender Weise angeordnet: Wenn ist $w_\varrho = \frac{p_\varrho}{q_\varrho}$, wo p_ϱ und q_ϱ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, so lasse man diejenigen Zahlen w_ϱ vorangehen, für welche $p_\varrho + q_\varrho = s_\varrho$ einen kleineren Wert hat; bei gleichem Werte von s_ϱ ordne man die Zahlen w_ϱ nach ihrer Gröfse (vergl. den Anfang des § 10). Nun setze man

$$c_\varrho = \frac{1}{(p_\varrho + q_\varrho)^3}$$

und bilde die Summe

$$f(x) = \Sigma c_\varrho (x - w_\varrho)^{\frac{1}{3}},$$

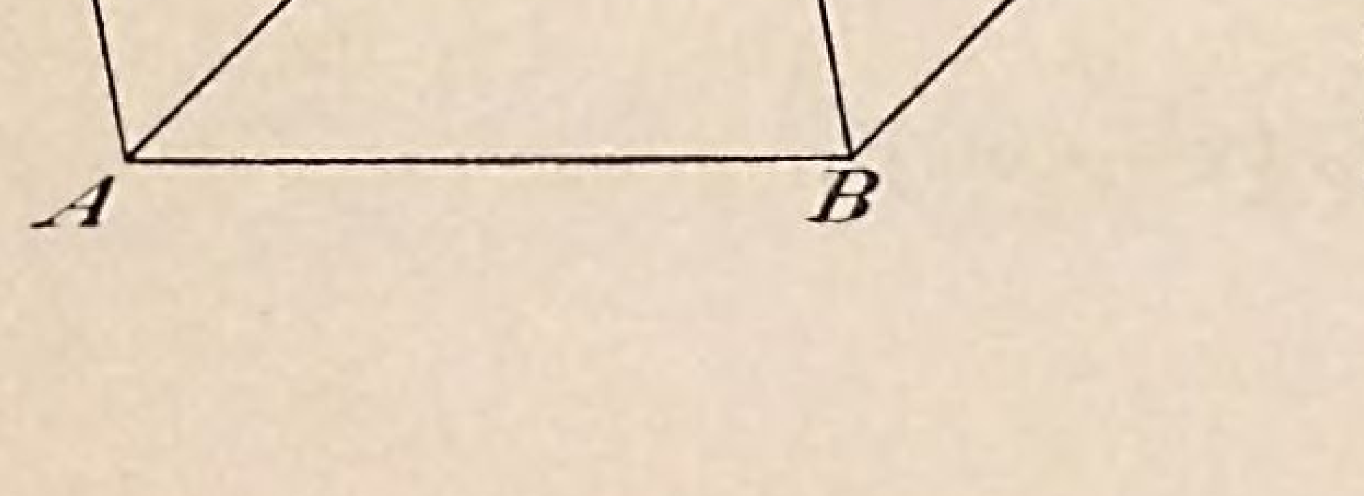
welche stets konvergiert. Diese Funktion ist stetig und nimmt mit wachsendem x beständig zu. Da demnach die vordere Derivierte stets zwischen 0 und $+\infty$ liegt, so hat die durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellte Kurve zwischen je zwei Punkten eine bestimmte Länge.

§ 5.

Die Messung der Flächen.

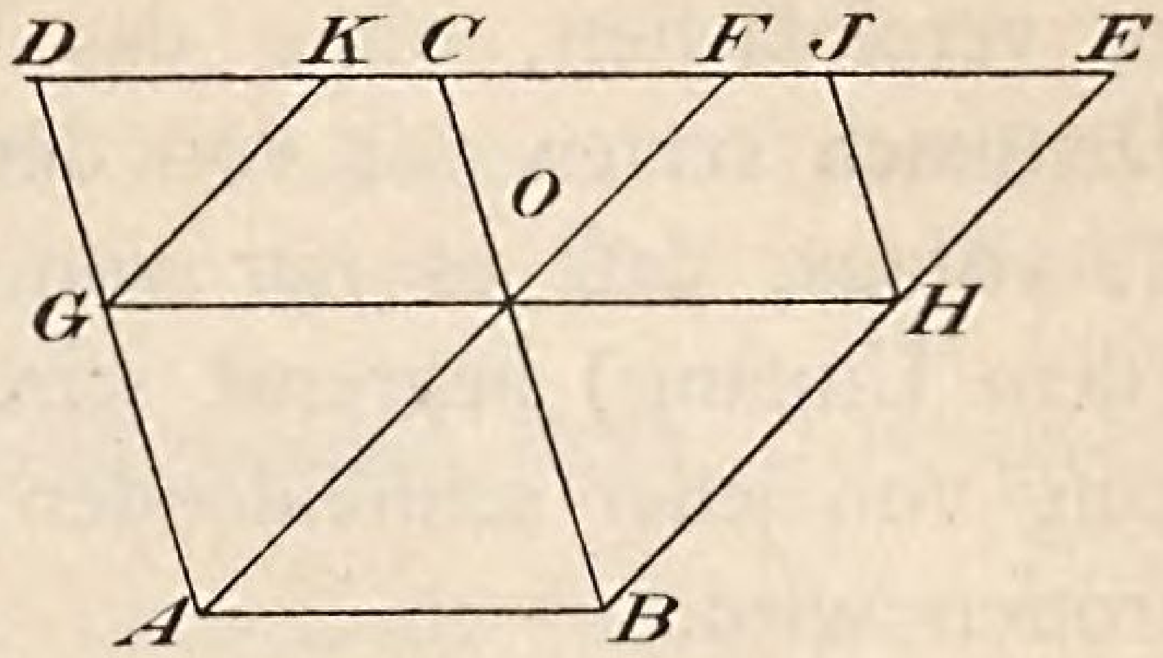
1. Wie sehr das allgemeine Streben dahin geht, die Gleichheit auf die Kongruenz zurückzuführen, geht aus den zahlreichen Konstruktionen hervor, die den Zweck haben, flächengleiche Polygone in kongruente Teile zu zerlegen.[3]) Zuerst dürfte W. Bolyai ein derartiges Verfahren angegeben haben, das leider wenig beachtet worden ist. Gerwien führte eine entsprechende Zerlegung bei beliebigen flächengleichen Dreiecken aus; sein Verfahren wurde von Göpel vereinfacht. Viel weiter geht Hr. Réthy, dessen Konstruktionen besonders einfach sind.

Wofern man nur die Möglichkeit einer derartigen Zerlegung übersehen will, ist es am einfachsten, vom Parallelogramm auszugehen, da man jedes Polygon in eine endliche Zahl von Dreiecken zerlegen und jedes Dreieck in ein Parallelogramm umwandeln kann. Um letzteres auszuführen, ziehe man durch den Eckpunkt A des Dreiecks ABC die Parallele zu BC und durch die Mitte M von AB die Parallele zu AC; trifft die zweite Parallele die Seite BC in D und die erste in E, so enthält das Parallelogramm AEDC nur Teile, die mit Teilen des Dreiecks kongruent sind. Nun lassen sich flächengleiche Parallelogramme stets auf einander beziehen durch Vermittlung von Parallelogrammen, die gleiche Grundlinie und Höhe haben. Demnach genügt es, den Satz zu erweisen: Wenn Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe haben, so lassen sie sich in kongruente Teile zerlegen, die in den beiden Figuren nur auf verschiedene Weisen angeordnet sind.



Zum Beweise lege man die beiden Parallelogramme mit der Grundlinie auf einander. Bei der in Figur 1 angegebenen Lage besteht ABCD aus ABCF

und AFD, ABEF aus ABCF und BEC, also je aus kongruenten Stücken. Dagegen ziehe man in Fig. 2, wo sich AF und BC zwischen B und C in O treffen, durch O die Parallele zu AB, dann durch G die GK || OF, durch H die HI || OC. Dadurch zerlegt sich ABCD in ABO, AOG, GOCK und GKD; ebenso zerfällt ABEF in ABO, BOH, OHIC und IHE, so dafs die einzelnen Teile kongruent sind. Wenn sich GK und HI zwischen H und I schneiden, so wiederholt man die angegebene Zeichnung. Überhaupt trage man BO, so oft es angeht, auf BC ab; dadurch möge man zu den Punkten O_1 . . . O_n kommen, deren Anzahl endlich ist, und mache für jeden die angegebene Konstruktion.



Demnach kann man, wenn zwei beliebige Polygone gegeben sind, durch passende Zerlegung des einen und geeignete Anordnung der einzelnen Teile stets erreichen, dafs das neue Polygon dem andern selbst oder einem seiner Teile kongruent ist oder einen mit dem andern Polygon kongruenten Teil enthält. Hiernach ist die Flächengleichheit auf die Kongruenz zurückgeführt.

Bei einem derartigen Verfahren macht man jedoch eine Voraussetzung, die von den meisten Geometern gar nicht erwähnt wird und auf welche erst in der neuesten Zeit hingewiesen ist.[4]) Wir sprechen sie in folgender Weise aus:

Dadurch, dafs man eine Figur in Teile zerlegt und diese beliebig anordnet, können wir zwar die Gestalt auf mannigfache Weise verändern; dabei ist es aber nicht möglich, eine neue Figur zu bilden, von welcher die gegebene selbst nur ein Teil ist oder welche als Teil von der ersten Figur eingeschlossen ist.

Hr. Stolz drückt dieselbe Voraussetzung bei Beschränkung auf einen besonders wichtigen Fall in folgender Weise aus:

Zerlegt man ein Polygon B durch Gerade in mehrere Teile und läfst auch nur einen von ihnen weg, so kann man mit den übrigen das Polygon B nicht mehr bedecken.

Die Richtigkeit dieser Voraussetzung läfst sich in aller Strenge beweisen. Dazu dient ein Verfahren, welches geeignet ist, die Messung beliebiger ebenen Flächen auszuführen. Ich habe dasselbe bereits früher skizziert und will es im folgenden ausführlich

darlegen. Ich beschränke mich aber auf die euklidische Geometrie und mache einige Annahmen, die geeignet sind, die Darlegung zu vereinfachen, ohne das Wesen des Beweises zu verändern. Demnach setzen wir von dem betrachteten ebenen Flächenstück 1. voraus, dafs es nur von einer einzigen geschlossenen Linie (dem Umfang) begrenzt wird, und nehmen 2. an, dafs der Umfang von jeder schneidenden Geraden nur in zwei Punkten getroffen wird.

2. Nun ziehen wir in der Ebene zwei Scharen von parallelen Geraden derartig, dafs zwei auf einander folgende Gerade derselben Schar jedesmal denselben Abstand haben, und dafs diese Abstände für beide Systeme gleich sind; zudem sollen die Linien der einen Schar auf denen der andern senkrecht stehen. Hiernach begrenzen zwei auf einander folgende Gerade der einen Schar in Verbindung mit zwei solchen Linien der andern Schar jedesmal ein Quadrat. Von diesen Quadraten betrachte ich an erster Stelle diejenigen, welche ganz innerhalb der gegebenen Fläche liegen, und nenne ihre Zahl a; dann zähle ich diejenigen, welche wenigstens einen Teil mit der Fläche gemeinschaftlich haben, und bezeichne ihre Anzahl mit b. Unter den letzten b Quadraten sind die a zuerst betrachteten jedenfalls enthalten; daher kann b nicht kleiner sein als a. In dem speciellen Falle, dafs der Umfang ganz aus Strecken besteht, die je einer der beiden Geradenscharen angehören, liegt jedes Quadrat entweder ganz innerhalb oder ganz aufserhalb der Fläche; alsdann ist $b = a$. Im allgemeinen wird aber der Umfang der Fläche von einzelnen Geraden des einen oder andern oder von Geraden beider Systeme geschnitten; dann giebt es Quadrate, die zum Teil innerhalb und zum Teil aufserhalb der Fläche liegen; alle diese gehören zu den b zweiten, aber nicht zu den a ersten Quadraten; es ist also jetzt $b > a$. Wählt man hierbei den Abstand zweier auf einander folgenden Parallelen gleich der Längeneinheit, so soll festgesetzt werden, dafs die Mafszahl der Fläche zwischen a und b liegt; ist aber dieser Abstand gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit und sind a_ν und b_ν die entsprechenden Zahlen, so soll die Mafszahl zwischen $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ liegen. (Wird im ersten Falle $a = b$, im zweiten $a_\nu = b_\nu$, so soll die Mafszahl gleich a, resp. gleich $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ sein.)

Dafs diese Festsetzungen nicht willkürlich getroffen, sondern in der Sache selbst begründet sind, bedarf keiner nähern Auseinandersetzung.

3. Wir weisen zunächst nach, dafs die angegebene Operation zu einer bestimmten Zahl führt, indem wir zeigen, dafs der Wert $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2}$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dafs man ν hinlänglich grofs werden läfst. Zu dem Ende betrachten wir die Anzahl derjenigen Geraden der beiden Systeme, welche den Umfang der Fläche schneiden. Bei der ersten Konstruktion, wo der Abstand gleich der Längeneinheit gewählt wird, mögen m Gerade der ersten und n Gerade der zweiten Schar den Umfang treffen (wo m und n natürlich auch gleich o sein können). Da nach unserer Annahme jede Schnittlinie zwei Punkte mit der begrenzenden Linie gemeinschaftlich hat, jeder Schnittpunkt aber, wofern er nicht mit einem Eckpunkt zusammenfällt, zwei Quadraten angehört und jedes Quadrat, in dessen Umfang ein Schnittpunkt liegt, zu den b einschliefsenden, aber nicht zu den a eingeschlossenen Quadraten zu rechnen ist, so ist die Differenz $b - a$ jedenfalls nicht gröfser als die Zahl der Schnittpunkte $2m + 2n$. Jetzt schiebt man in jeder Schar zwischen irgend zwei auf einander folgende Linien $\nu - 1$ zu ihnen parallele Gerade derartig ein, dafs in dem neuen System der Abstand zwischen je zwei auf einander folgenden Geraden gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist. Wenn jetzt die Zahl der schneidenden Linien in der einen Schar m' und in der andern n' beträgt, so gilt genau wie vorher die Relation:

$$b_\nu - a_\nu \leqq 2m' + 2n'.$$

Um die Beziehung zu erkennen, die zwischen m und m', n und n' besteht, bezeichne man die m im ersten Falle schneidenden Linien der einen Schar der Reihe nach mit $L_1, L_2 \ldots L_m$, die vor L_1 vorangehende mit L_0 und die L_m folgende mit L_{m+1}. Dann mufs jede zu ihnen parallele Linie, die den Umfang schneidet, zwischen L_0 und L_{m+1} eingeschlossen sein. Von den Parallelen derselben Schar, die im zweiten Falle benutzt werden, liegen aber nur $\nu m + \nu - 1$ zwischen L_0 und L_{m+1}. Dieselbe Betrachtung

kann für die zweite Schar angestellt werden. Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$m' \leqq \nu m + \nu - 1$$
$$n' \leqq \nu n + \nu - 1.$$

Demnach erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} \leqq \frac{2m + 2n}{\nu} + \frac{4}{\nu} - \frac{4}{\nu^2}.$$

Da aber m + n eine feste Zahl ist, so kann man ν so grofs wählen, dafs die rechte Seite beliebig klein wird. Somit nähern sich bei der gemachten Konstruktion die Werte $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ demselben Grenzwert F.

4. Um die Zahl F als Mafszahl bezeichnen zu dürfen, müssen wir nachweisen, dafs sie von der Wahl der beiden auf einander senkrecht stehenden Systeme von parallelen Linien unabhängig ist. Bei diesem Nachweis möchten wir der Kürze wegen das Wort Netz in einem Sinne gebrauchen, der von dem gewöhnlichen etwas abweicht. Wir gehen von zwei fest gewählten Geraden aus, die auf einander senkrecht stehen; zu jeder von ihnen ziehen wir auf beiden Seiten parallele Linien so, dafs der Abstand zwischen zwei auf einander folgenden Linien gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist. Die Gesamtheit der hierdurch erhaltenen Systeme von Linien für ein unbegrenzt wachsendes ν nennen wir ein Netz, und sagen kurz, das durch die beiden ersten Geraden bestimmte Netz habe für die Fläche die Mafszahl F geliefert. Wir haben also nachzuweisen, dafs wir stets dieselbe Mafszahl erhalten, welches Netz wir auch zu ihrer Bestimmung benutzen.

5. Dem allgemeinen Beweise schicken wir eine Anzahl von Hilfssätzen voraus:

a) Die Mafszahl F bleibt ungeändert, wenn das Netz unter Beibehaltung der Richtungen der Systeme von Parallelen beliebig verschoben wird.

Diesem Satze können wir auch folgenden Ausspruch geben:

Indem wir von zwei auf einander senkrecht stehenden Geraden M und N ausgehen und zu jeder von ihnen eine Schar von Parallelen ziehen in einem Abstande, der gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist, mögen wir bei unbegrenzter Vergröfserung

von ν für die Fläche die Maſszahl F erhalten. Jetzt gehen wir von zwei anderen Linien M' und N' aus, von denen die erste zu M, die zweite zu N parallel ist; wenn wir dann die Maſszahl F' erhalten, so ist $F' = F$.

Für das erste Netz mögen a_ν und b_ν, für das zweite a_ν' und b_ν' die oben angegebene Bedeutung haben. In beiden Fällen werden $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{b_\nu' - a_\nu'}{\nu^2}$ bei wachsendem ν unbegrenzt abnehmen. Zudem wird $a_\nu = a_\nu'$, $b_\nu = b_\nu'$, wenn sowohl der Abstand von M und M' wie der von N und N' ein Vielfaches vom ν^{ten} Teile der Längeneinheit beträgt. Wir können also, so lange es sich um Vergleichung der angegebenen Zahlen handelt, annehmen, der Abstand von M und M', und der von N und N' betrüge weniger als $\frac{1}{\nu}$. Hierbei können einzelne der im ersten Falle den Umfang treffenden Quadrate nach auſsen oder nach innen zu liegen kommen, und einzelne vorher im Innern oder im Äuſsern gelegene Quadrate an den Umfang gelangen. Nun liegt F zwischen $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{a_\nu}{\nu^2}$, F' zwischen $\frac{b_\nu'}{\nu^2}$ und $\frac{a_\nu'}{\nu^2}$; der Unterschied beträgt aber nach unserer Entwicklung höchstens

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} + \frac{b_\nu' - a_\nu'}{\nu^2},$$

und diese Zahl kann beliebig klein gemacht werden.

b) Wenn zwei kongruente Flächen durch Parallelverschiebung in einander übergeführt werden können, so liefern sie für dasselbe Netz gleiche Maſszahlen.

Während in a) das Netz verschoben wird, wird hier die Fläche verschoben; das Ergebnis ist natürlich dasselbe.

c) Ist eine Fläche Φ in eine endliche Zahl von Teilen $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ zerlegt, so ist die für irgend ein Netz erhaltene Maſszahl von Φ gleich der Summe der für $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ durch dasselbe Netz erhaltenen Maſszahlen.

Für die Fläche Φ mögen a_ν und b_ν die oben angegebenen Werte bezeichnen; entsprechend mögen, wenn $\varkappa$ irgend eine Zahl aus der Reihe $1 \ldots m$ ist, für die Fläche $\Phi_\varkappa$ die Zahlen $a_\nu^\varkappa$ und $b_\nu^\varkappa$ gefunden sein. Da im allgemeinen einzelne der Linien, durch welche die Teile $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ gegen einander abgegrenzt

werden, durch das Innere von Quadraten hindurchgehen, die innerhalb Φ liegen, so ist jedenfalls

$$a_\nu \geqq \sum_\varkappa a_{\nu\varkappa},\ b_\nu \leqq \sum_\varkappa b_{\nu\varkappa}, \text{ oder}$$

$$a_\nu = \sum a_{\nu\varkappa} + p_\nu,\ b_\nu = \sum b_{\nu\varkappa} - q_\nu,$$

wo p_ν und q_ν positive Zahlen mit Einschlufs der Null sind. Jetzt ist offenbar:

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = \sum_\varkappa \frac{b_{\nu\varkappa} - a_{\nu\varkappa}}{\nu^2} + \frac{p_\nu + q_\nu}{\nu^2}.$$

In dieser Gleichung hat die linke Seite und jeder der ersten m Summanden auf der rechten Seite den Grenzpunkt Null, folglich auch der letzte Teil, oder da p_ν und q_ν nicht negativ sein können, die Quotienten $\frac{p_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{q_\nu}{\nu^2}$ selbst. Stellt also F den Grenzwert von $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und $F_\varkappa$ den von $\frac{a_{\nu\varkappa}}{\nu^2}$ dar, so folgt: $F = \sum F_\varkappa$.

d) Wenn zwei Parallelogramme dieselbe Grundlinie besitzen und zwischen denselben Parallelen liegen, so kann man stets durch passende Teilung des ersten und geeignete Parallel-Verschiebung der einzelnen Teile erreichen, dafs die Teile in der neuen Lage das zweite Parallelogramm bilden.

Um diesen Satz und einige ähnliche recht einfach aussprechen zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Zwei Polygone mögen parallel-kongruent heifsen, wenn ihre entsprechenden Seiten gleiche Länge, gleiche Richtung und gleichen Abstand besitzen, wenn also das eine durch blofse Parallel-Verschiebung zur Deckung mit dem andern gebracht werden kann.

Hiernach können wir sagen:

Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien, die zwischen denselben Parallelen liegen, können stets in parallel-kongruente Teile zerlegt werden.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Entwicklungen, die wir an die Figuren 1 und 2 geknüpft haben. Läfst man z. B in Fig. 2 ABO an seiner Stelle, verschiebt aber AGKCO in der Richtung AB um eine Länge gleich AB und GDK in derselben Richtung um die Länge 2AB, so erhält man das Parallelogramm ABEF. In ähnlicher Weise kann man stets verfahren.

e) Liegen von m Parallelogrammen $P_1 \ldots P_m$ jedesmal

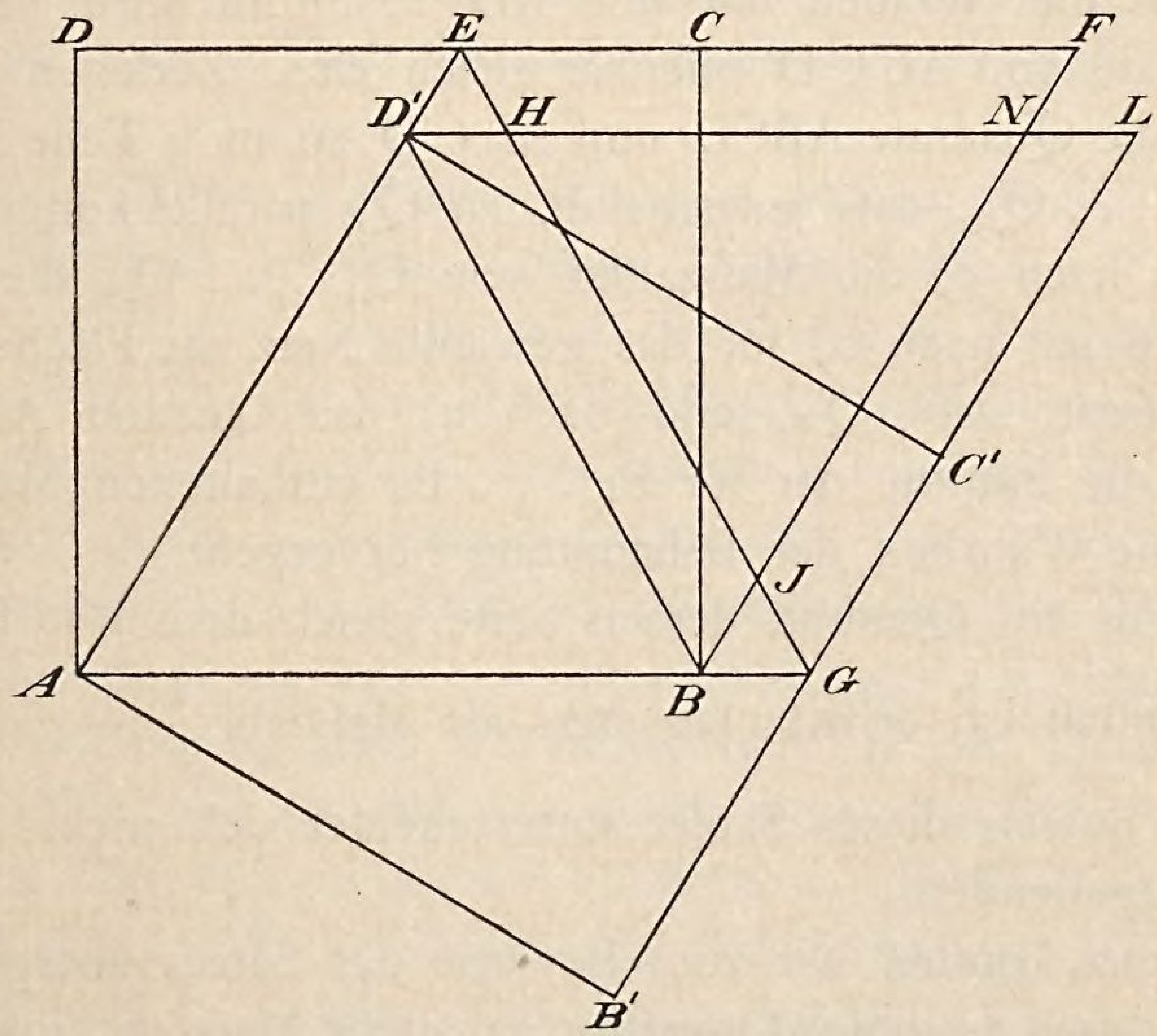
zwei auf einander folgende mit gleichen Seiten zwischen denselben Parallelen, so können die Parallelogramme P_1 und P_m in dieselbe Zahl von parallel-kongruenten Teilen zerlegt werden.

Man hat jedesmal für zwei auf einander folgende Flächen die dem vorigen Satze entsprechende Teilung auszuführen und jede solche Zerlegung auch auf die vorhergehenden zu übertragen; dadurch erhält man für P_1 eine Zahl von Teilen, die durch bloſse Verschiebung in eine solche Lage gebracht werden können, daſs sie das Parallelogramm P_m bilden.

f) Zwei kongruente Quadrate, die beliebige Lage zu einander haben, können in parallel-kongruente Teile zerlegt werden; mit anderen Worten:

Wenn zwei Quadrate über gleichen Seiten errichtet sind, so kann man stets durch passende Teilung des ersten und geeignete Parallelverschiebung der einzelnen Teile erreichen, daſs die Teile in der neuen Lage das zweite Quadrat zusammensetzen.

Es genügt, den Satz unter der Annahme zu beweisen, daſs die Quadrate einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben. So seien



(Fig. 3) ABCD und AB'C'D' zwei Quadrate und AB = AB'. Die Geraden AD' und DC mögen einander in E, die Geraden AB und B'C' in G schneiden; die durch D' zu AB gezogene Parallele möge in L mit B'C' und die durch B zu AD' gezogene

Parallele in F mit DC zusammentreffen. Die Schnittpunkte von EG mit BF und mit D'L seien I und H, und in K mögen die Geraden BF und D'L einander schneiden. Da die Dreiecke ADE und AB'G kongruent sind, müssen BD' und GE parallel sein. Von den Parallelogrammen D'EFK, D'EIB, D'BGH und BGLK liegen je zwei auf einander folgende bei gleicher Grundlinie zwischen denselben Parallelen. Die Parallelogramme ABFE und AGHD' können also in parallel-kongruente Stücke zerlegt werden. Dasselbe gilt einerseits für ABCD und ABFE, andererseits für AB'C'D' und AGLD', also auch für die Quadrate ABCD und AB'C'D'.

g) Für ein Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, erhält man stets die Mafszahl eins.

Um die Mafszahl des Quadrats ABCD durch ein Netz zu bestimmen, in welchem die Parallelen der einen Schar mit AB' parallel sind, konstruiere man das kongruente Quadrat AB'C'D'. Da eine blofse Parallelverschiebung des Netzes keine Änderung der Mafszahl herbeiführt, können wir das Netz zu Grunde legen, das durch die Geraden AB' und AD' bestimmt wird. Dann ist die Mafszahl von AB'C'D' offenbar gleich eins. Zerlegen wir jetzt nach f) die Quadrate ABCD und AB'C'D' so in n Teile $P_1 \dots P_n$ resp. $Q_1 \dots Q_n$, dafs jedesmal $P_\varkappa$ zu $Q_\varkappa$ parallel-kongruent ist, so liefern nach c) die Mafszahlen von $Q_1 \dots Q_n$ die Summe eins. Nun hat nach b) für das gewählte Netz die Fläche $P_\varkappa$ dieselbe Mafszahl wie $Q_\varkappa$, und nach c) das Quadrat ABCD als Mafszahl die Summe der für $P_1 \dots P_n$ enthaltenen Mafszahlen, woraus die Wahrheit der Behauptung hervorgeht.

h) Für ein Quadrat, dessen Seite gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist, erhält man stets als Mafszahl $\frac{1}{\nu^2}$.

Der Beweis dieses Satzes unterscheidet sich nicht von dem des vorangehenden.

6. Jetzt können wir zum Beweise des Satzes übergehen:

Die durch die obige Operation erhaltene Mafszahl einer ebenen Fläche ist von der Wahl des Netzes unabhängig.

In einem Netze habe man den Abstand zwischen je zwei auf einander folgenden Parallelen gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit gemacht und die Zahlen a_ν und b_ν erhalten. Ist jetzt

$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = \delta$, so kann der Unterschied zwischen $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und der durch dies Netz erhaltenen Maſszahl jedenfalls nicht gröſser als δ sein. Für ein zweites Netz nehme man den Abstand gleich dem $(\nu\varrho)^{\text{ten}}$ Teile der Längeneinheit. Von den hierbei erhaltenen Quadraten mögen mindestens c innerhalb eines jeden der vorher erhaltenen Quadrate liegen. Dann kann man nach 5. h) durch Vergröſserung von ϱ erreichen, daſs $\frac{c}{(\nu\varrho)^2}$ beliebig nahe an $\frac{1}{\nu^2}$ kommt. Ist ε die gröſste Differenz, welche der Wert von $\frac{1}{\nu^2} - \frac{c}{(\nu\varrho)^2}$ bei einem der ersten Quadrate erreicht, so beträgt der Unterschied der durch beide Messungen erhaltenen Maſszahlen höchstens $a_\nu . \varepsilon$. Da man aber bei der zweiten Operation ϱ beliebig vergröſsern und dadurch ε beliebig klein machen kann, so läſst sich erreichen, daſs $a_\nu . \varepsilon$ kleiner wird als die zuerst gefundene Gröſse δ. Hiernach können sich die vermittelst der beiden Netze erhaltenen Maſszahlen höchstens um die Gröſse 2δ unterscheiden, und dieser Wert kann dadurch beliebig klein gemacht werden, daſs man ν hinreichend wachsen läſst. Hiernach ist der Beweis in aller Strenge erbracht.

7. Wir haben jetzt zu zeigen, in welcher Weise krumme Flächen gemessen werden können. Dabei wollen wir uns auf Flächen beschränken, die in jedem Punkte eine Tangentialebene besitzen, oder für welche diese Forderung wenigstens im allgemeinen erfüllt ist. Zunächst beschreiben wir in die das Flächenstück begrenzende Linie einen Sehnenzug und bezeichnen die Punkte, in denen zwei Sehnen zusammenstoſsen, der Reihe nach mit A_0, A_1, A_2 . . . $A_\varkappa$. . . Zu irgend zwei auf einander folgenden Punkten $A_\varkappa\ A_{\varkappa+1}$ bestimme ich auf der Fläche einen weiteren Punkt $A_\varkappa'$ so, daſs die durch diese drei Punkte gelegte Ebene mit den drei in diesen Punkten an die Fläche gelegten Tangentialebenen Winkel bildet, die kleiner sind als ein fest gewählter Winkel δ. Zudem soll dasjenige Stück der Fläche, welches durch die Ebene $A_\varkappa\ A_{\varkappa+1}\ A_\varkappa'$ von der übrigen Fläche abgetrennt wird, die Eigenschaft haben, daſs der Winkel zwischen den Tangentialebenen, die in irgend zwei Punkten dieses Teiles an die Fläche gelegt werden können, stets kleiner sind als δ. Ist in

ähnlicher Weise von $A_{\varkappa+1}$ und $A_{\varkappa+2}$ aus der Punkt $A'_{\varkappa+1}$ bestimmt, so wollen wir den Fall nicht ausschliefsen, dafs die Punkte $A_{\varkappa}'$ und $A'_{\varkappa+1}$ zusammenfallen; wenn aber diese beiden Punkte verschieden sind, so soll das Dreieck $A_{\varkappa+1}\ A_{\varkappa}'\ A'_{\varkappa+1}$ allen jenen Bedingungen genügen, die wir für $A_{\varkappa}\ A_{\varkappa+1}\ A_{\varkappa}'$ aufgestellt haben. In ähnlicher Weise schliefsen wir weitere Dreiecke an, bis die ganze Fläche mit Dreiecken angefüllt ist. Der Grenzwert, den die Summe der Dreiecke für einen immer kleiner werdenden Winkel δ liefert, ist der Inhalt der krummen Fläche.

Der Beweis bedarf keiner nähern Ausführung, da es nur nötig ist, die Entwicklungen des vorigen Paragraphen zu übertragen. Auch wird es nicht nötig sein zu zeigen, dafs man stets den aufgestellten Forderungen genügen kann. Natürlich ist es nicht nötig, die einzelnen ebenen Flächen als Dreiecke vorauszusetzen; man darf beliebige Polygone wählen, wofern nur die oben bezeichneten Winkel hinlänglich klein sind.

8. An dieser Stelle möge es gestattet sein, auf einen Unterschied hinzuweisen, der, wie Hr. Schwarz[5]) gezeigt hat, zwischen krummen Linien und krummen Flächen besteht. Für den Beweis kommt es in beiden Fällen auf die Kleinheit der Winkel an; aber bei krummen Linien, die überall Tangenten besitzen, können die Winkel zwischen einer Sehne und den in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten stets durch hinlängliche Verkleinerung der Sehnen beliebig klein gemacht werden; demgemäfs kann der Bogen einer krummen Linie definiert werden als der Grenzwert, dem sich die Länge des Sehnenzuges bei unbegrenzter Verkleinerung der einzelnen Sehnen nähert. Dagegen genügt die Festsetzung, dafs die sämtlichen Polygone, die in die krumme Fläche eingeschrieben werden, unendlich kleine Werte annehmen, selbst bei solchen Flächen nicht, die überall Tangentialebenen besitzen. Man kann eine Anordnung treffen, bei der die einzelnen Polygone unendlich klein werden, ohne dafs ihre Ebenen mit den in den Eckpunkten an die Fläche gelegten Tangentialebenen immer kleinere Winkel bilden; dann wird aber, wie Hr. Schwarz zeigt, die Summe der Polygone nicht mehr den Inhalt der Fläche darstellen, sondern unbegrenzt wachsen.

§ 6.

Die Messung der Körper.

1. Während flächengleiche ebene Polygone (wenigstens in der euklidischen Ebene) stets in kongruente Teile zerlegt werden können, gilt ein entsprechender Satz für Polyeder nicht oder hat wenigstens bis jetzt nicht erwiesen werden können. Eine allgemeine Erörterung der Bedingungen, unter denen es bisher gelungen ist, inhaltsgleiche Polyeder aus kongruenten Stücken zusammenzusetzen, darf uns hier nicht beschäftigen; einzelne Fälle müssen wir aber anführen, soweit sie für die folgende Entwicklung gebraucht werden. Wir gehen von dem Satze aus:

»Wenn die Grund- und Endflächen zweier Prismen in denselben beiden parallelen Ebenen liegen und in parallel-kongruente Teile zerlegt werden können, während die Seitenkanten des einen dieselbe Richtung haben, wie die des andern: so können die Prismen in kongruente Teile zerlegt werden, die durch Parallelverschiebung mit einander zur Deckung gebracht werden können.«

So mögen die Prismen Π und Π' mit ihren Grundflächen P und P' auf derselben Ebene stehen; die Seitenkanten des einen mögen dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben, wie die des andern. (Dann liegen auch die Endflächen in einer Ebene.) Zudem sei die Grundfläche P in n Teile $P_1 \ldots P_\varkappa \ldots P_n$ und die Grundfläche P' in n Teile $P_1' \ldots P_\varkappa' \ldots P_n'$ in der Weise zerlegt, dafs jeder Teil $P_\varkappa$ (für $\varkappa = 1 \ldots n$) durch Parallel-Verschiebung zur Deckung mit $P_\varkappa'$ gebracht werden kann. Alsdann konstruiere man über $P_1 \ldots P_n$, $P_1' \ldots P_n'$ jedesmal dasjenige Prisma, dessen Seitenkanten mit denen der gegebenen Prismen gleiche Länge und gleiche Richtung haben; dadurch wird Π in die n Prismen $\Pi_1 \ldots \Pi_n$, Π' in $\Pi_1' \ldots \Pi_n'$ zerlegt. Verschiebt man Π_1 ohne Drehung so, dafs P_1 mit P_1' zur Deckung gelangt, so fällt Π_1 mit Π_1' zusammen. Da dasselbe von $\Pi_2 \ldots \Pi_n$ gilt, so ist der Satz erwiesen.

2. Nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen können zwei kongruente Quadrate, die in derselben Ebene liegen, stets in parallel-kongruente Stücke zerteilt werden. Somit genügen zwei kongruente Würfel, die eine Kante gemeinschaftlich haben, stets den Voraussetzungen des vorangehenden Satzes; sie lassen

sich also stets aus parallel-kongruenten Teilen zusammensetzen. Daraus ergiebt sich der folgende Satz:

»Zwei kongruente Würfel können in dieselbe Anzahl von Stücken derartig zerlegt werden, dafs jedes Stück des einen durch Parallel-Verschiebung zur Deckung mit einem Stück des andern gebracht werden kann.«

Beim Beweise dürfen wir annehmen, dafs die Würfel einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben. So sei der este Würfel bestimmt durch die drei von demselben Punkte ausgehenden gleichen Strecken OA, OB, OC, von denen jede auf den beiden anderen senkrecht steht; in gleicher Weise seien OA', OB', OC' die drei vom Punkte O ausgehenden Kanten des zweiten Würfels, und es sei $OA' = OA$. Die Ebene OCA' schneide die Ebene OAB in OA_1; man lasse OB_1 in der Ebene OAB auf OA_1 und lasse OC_1 in der Ebene OCA' auf OA' senkrecht stehen. Die Punkte A_1, B_1, C_1 wähle man so, dafs $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OA$ ist. Dann liegen OA, OB, OA_1 und OB_1 in derselben Ebene, die auf OC senkrecht steht; ebenso liegen OA_1, OC, OA' und OC_1 in der auf OB_1 senkrecht stehenden Ebene; endlich stehen die Strecken OB_1, OC_1, OB' und OC' auf OA' senkrecht. Die vier Würfel (O, ABC), (O, A_1B_1C), (O, $A'B_1C_1$), (O, A'B'C') bilden also eine Reihe, in der je zwei auf einander folgende eine Kante gemeinschaftlich haben. Hiernach übersieht man leicht, wie die den Forderungen des Lehrsatzes entsprechende Zerlegung ausgeführt werden kann.

Es ist vielleicht ganz passend, die Art dieser Zerteilung etwas näher darzulegen. Zu dem Ende bezeichne ich die vier Würfel der Reihe nach mit W_1, W_2, W_3, W_4. Durch Ebenen, die der Kante OC parallel sind, wird der erste Würfel in die Teile $T_{12}' \ldots T_{12}^m$ und der zweite Würfel durch solche Ebenen in die Teile $T_{21}' \ldots T_{21}^m$ so zerlegt, dafs jedesmal $T_{12}^{\varkappa}$ und $T_{21}^{\varkappa}$ parallel-kongruent sind. Eine entsprechende Beziehung finde zwischen den Teilen $T_{23}' \ldots T_{23}^n$ des zweiten und den entsprechenden Teilen $T_{32}' \ldots T_{32}^n$ des dritten Würfels statt. Wenn die Teile $T_{21}^{\varkappa}$ und T_{23}^{λ} ein Stück T_{213}^{ϱ} gemeinschaftlich haben, so wird diesem als einem Teile von $T_{21}^{\varkappa}$ ein parallel-kongruentes Stück T_{123}^{ϱ} von W_1 und als Teil von T_{23}^{λ} ein parallel-kongruentes Stück T_{312}^{ϱ} von W_3 entsprechen. Auf diese

Weise werden der erste und der dritte Würfel in Teile zerlegt, die durch blofse Verschiebung zur Deckung gebracht werden können. Nun werde eine entsprechende Zerlegung für den dritten und vierten Würfel in Teile T^{μ}_{34} und T^{μ}_{43} ausgeführt. Hat jetzt der Teil T^{μ}_{34} mit dem Teile T^{ϱ}_{312} ein Stück T^{σ}_{3412} gemeinschaftlich, so wird dies einen Teil T^{σ}_{1234} von W_1 decken, sobald T^{ϱ}_{312} mit T^{ϱ}_{123} zur Deckung gebracht wird. Entsprechend kann das Stück T^{σ}_{3412} durch Parallel-Verschiebung zur Deckung gebracht werden mit einem Teil T^{σ}_{4312} von W_4. Die hierdurch bestimmten Teile T^{σ}_{1234} und T^{σ}_{4312} erfüllen die angegebenen Forderungen.

3. Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die im vorigen Paragraphen für ebene Flächen durchgeführten Entwicklungen auf allseitig begrenzte Raumteile (Körper) zu übertragen.[6]) Wir beschränken uns wieder auf den einfachsten Fall und setzen demnach voraus, dafs der zu untersuchende Körper eine einzige begrenzende Fläche besitzt und dafs jede ihn schneidende Gerade zwei Punkte mit dem Grenzgebilde gemeinschaftlich hat. Unsere Entwicklung gilt also direkt aufser für zahlreiche von krummen Flächen begrenzte Körper für alle konvexen Polyeder; sie kann aber leicht so umgeändert werden, dafs sie auch weitere Klassen von Körpern umfafst.

Wir konstruieren drei Scharen von parallelen Ebenen, von denen jedesmal zwei auf einander folgende denselben Abstand haben; die Ebenen der einen Schar sollen auf denen der beiden anderen Scharen senkrecht stehen. Dadurch erhalten wir ein Netz von Würfeln, deren Kanten dem gegebenen Abstand gleich sind. Wählt man diesen Abstand gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit und liegen a_ν der gebildeten Würfel innerhalb des zu messenden Körpers, während b_ν von ihnen im stande sind, den Körper einzuschliefsen, so setzen wir fest, dafs die Mafszahl zwischen $\frac{a_\nu}{\nu^3}$ und $\frac{b_\nu}{\nu^3}$ liegt. Der Nachweis, dafs durch diese Festsetzung eine Zahl bestimmt wird, und dafs diese Zahl von der Wahl der Ebenen unabhängig ist, erfordert nur solche Erwägungen, die bereits im vorigen Paragraphen durchgeführt sind. Wir beschränken uns daher auf folgende kurze Bemerkung.

Wenn für einen der Längeneinheit gleichen Abstand m Ebenen

der ersten, n Ebenen der zweiten und p Ebenen der dritten Schar den Körper schneiden, so werden höchstens np + pm + mn Schnittgerade je zweier dieser Ebenen den Körper treffen. Treten bei einem Abstande, der nur den ν^{ten} Teil der Längeneinheit beträgt, die Zahlen m′, n′, p′ an die Stelle von m, n, p, so ist

$$m' \leqq \nu\,(m + 1) - 1$$
$$n' \leqq \nu\,(n + 1) - 1$$
$$p' \leqq \nu\,(p + 1) - 1.$$

Es ist aber $b_\nu - a_\nu \leqq 2\,(n'p' + p'm' + m'n')$, also nimmt $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^3}$ unbegrenzt ab.

§ 7.

Die Messung der geraden Strecke.

Die drei letzten Paragraphen haben uns gelehrt, die Messung beliebiger Linien, Flächen und Körper auf die Messung der geraden Strecke zurückzuführen. Wenn auch direkt nur die erste Aufgabe auf die Messung von Strecken hinauskommt, so übersieht man doch leicht, dafs auch für die Lösung der zweiten und dritten Aufgabe die Mafszahlen von Strecken unentbehrlich sind. Es ist daher notwendig, den Prozefs, vermittelst dessen gerade Strecken gemessen werden, eingehend zu untersuchen.

1. Um eine Strecke b durch eine Strecke a zu messen, trage ich die Strecke a, so oft es angeht, auf b ab. Es kann vorkommen, dafs dies genau α-mal möglich ist, wo α eine ganze Zahl ist; dann ist $b = \alpha.\ a$. Wenn dies nicht möglich ist, so setzen wir voraus, es gebe ein Vielfaches von a, welches gröfser ist als b. Hiernach giebt es eine ganze Zahl α von der Beschaffenheit, dafs die Strecke a, α-mal auf b abgetragen, die Strecke b noch nicht anfüllt, dafs aber die Hinzunahme einer weitern Strecke a bereits über b hinausführt, oder dafs ist:

$$\alpha a < b < (\alpha + 1)\,a.$$

Um die Messung weiter fortsetzen zu können, mufs man annehmen, es sei möglich, die Strecke a in ν gleiche Teile zu zerlegen. Diejenige Strecke, die man genau ν-mal auf a abtragen kann, bezeichnen wir durch $\frac{1}{\nu}a$ und legen ihr die Mafszahl $\frac{1}{\nu}$ bei. Kann man jetzt die Strecke $\frac{1}{\nu}a$ genau β-mal auf b abtragen,

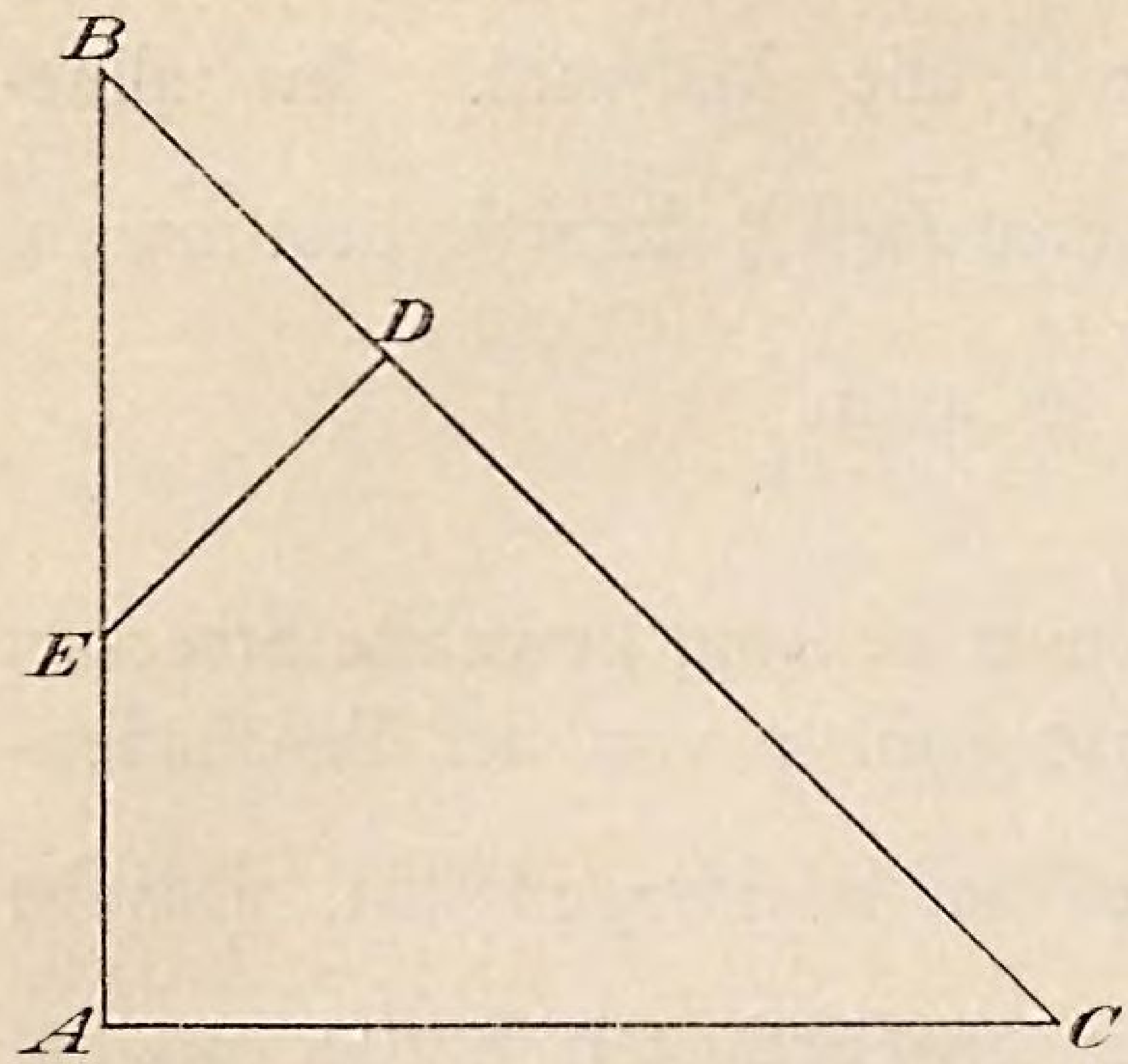
so setzt man $b = \frac{\beta}{\nu} a$ und nennt $\frac{\beta}{\nu}$ die Mafszahl. Im allgemeinen kann man aber nur eine ganze Zahl β derartig bestimmen, dafs ist:

$$\frac{\beta}{\nu} a < b < \frac{\beta + 1}{\nu} a.$$

Nun könnte man denken, für zwei beliebig gewählte Strecken a und b gäbe es immer eine ganze Zahl ν von der Beschaffenheit, dafs $\frac{1}{\nu} a$ sich vollständig genau auf b abtragen läfst. Das ist aber nicht der Fall, und eine der grofsartigsten Entdeckungen, die wir den Pythagoreern verdanken, ist die Erkenntnis, dafs zwei Strecken kein gemeinschaftliches Mafs besitzen können.

2. Von vornherein müssen wir die Existenz inkommensurabeler Strecken für höchst wahrscheinlich halten. Man trage nämlich die Längeneinheit von einem festen Punkte aus beliebig oft in einer bestimmten Richtung ab; dadurch gelangt man zu Punkten, die mit den Ziffern 1, 2, 3 . . . bezeichnet werden sollen. Indem man jetzt die Hälfte der Längeneinheit von demselben Punkte aus in der gegebenen Richtung abträgt, wird zwischen je zwei der vorhin bezeichneten Punkte α und $\alpha + 1$ ein Punkt $\frac{2\alpha + 1}{2}$ eingeschoben. Macht man denselben Prozefs mit dem dritten, vierten . . . Teile der Längeneinheit, so werden stets, wie weit man auch gehen mag, nur diskrete Punkte markiert, während die nicht markierten Punkte ganze Strecken anfüllen. Man wird kaum annehmen können, dafs die Fortführung dieses Prozesses alle in der festgesetzten Richtung liegenden Punkte liefert.

Das ist denn auch bereits von den Alten direkt gezeigt worden, und es dürfte nicht ohne Interesse sein, einen geometrischen Beweis hierfür mitzuteilen, da bei den bekannten algebraischen Beweisen die gemachten Voraussetzungen nicht deutlich zu Tage treten. In einer parabolischen Raumform sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten AB und AC einander gleich sind. Man trage CD = CA auf CB ab und errichte in D auf BD die Senkrechte, welche die Seite AB in E trifft. Dann ist CAD = CDA und deshalb auch EAD = EDA. Demnach ist ED = EA, und das Dreieck EDB ist ebenfalls gleichschenklig-



rechtwinklig. Hätten jetzt AC und CB ein gemeinschaftliches Maſs, so müſste dasselbe auch in DB und AB, also auch in DB und EB enthalten sein. Es müſste also, da EA < EB ist, kleiner sein als die Hälfte von AB. Nun kann man aber auf EDB dieselbe Konstruktion anwenden und so stets in unbegrenzter Folge neue gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke derartig herleiten, daſs die Kathete des folgenden Dreiecks kleiner ist als die Hälfte der Kathete des vorangehenden und daſs ein etwa vorhandenes gemeinschaftliches Maſs von AB und BC auch in den Seiten aller folgenden Dreiecke aufgeht. Das widerstreitet aber der an erster Stelle gemachten Annahme; denn wenn es eine solche Strecke gäbe, so müſste für ein beliebiges μ ihr 2μ-faches kleiner sein als AB.

3. Ist für eine Zahl ν die Gleichung erfüllt: $\mathrm{b} = \frac{\alpha}{\nu}\mathrm{a}$, so nennen wir $\mathrm{A} = \frac{\alpha}{\nu}$ die Maſszahl von b für die Strecke a als Einheit. Wofern für irgend eine andere Zahl ν_1 die Zahl α_1 so bestimmt ist, daſs

$$\frac{\alpha_1}{\nu_1} \leq \mathrm{A} < \frac{\alpha_1 + 1}{\nu_1}$$

ist, wird auch stets die Forderung befriedigt:

$$\frac{\alpha_1}{\nu_1}\mathrm{a} \leq \mathrm{b} < \frac{\alpha_1 + 1}{\nu_1}\mathrm{a}.$$

Jede rationale Zahl A ist also durch die Festsetzung $\mathrm{A} = \frac{\alpha}{\nu}$ vollständig bestimmt.

Es fragt sich aber, ob wir auch dann von einer Maſszahl sprechen können, wenn die beiden Strecken kein gemeinschaftliches Maſs haben. Diese Frage spaltet sich nach den vorigen Entwicklungen in die beiden folgenden:

a) Ist durch die Festsetzung:

$$(1) \ \frac{\alpha}{\nu} \leq \mathrm{A} < \frac{\alpha + 1}{\nu}$$

eine, und zwar eine einzige Zahl bestimmt, wofern eine Methode bekannt ist, die gestattet, jedem Werte von ν einen der Gleichung (1) entsprechenden Wert von α zuzuordnen?

b) Ist die Strecke b ihrer Gröfse nach vollständig bestimmt, wenn die Längeneinheit gegeben und die Mafszahl durch die Festsetzung (1) bestimmt ist?

Natürlich setzt die Aufstellung der zweiten Frage bereits die Bejahung der ersten voraus.

Für die Beantwortung der ersten Frage erinnern wir uns, dafs zahlreiche Aufgaben der Algebra nicht durch rationale Zahlen gelöst werden können. Suchen wir z. B. diejenige Zahl A, deren Quadrat gleich 2 ist, so erkennen wir unmittelbar, dafs diese Zahl nicht rational sein kann; dagegen zerfallen alle Zahlen, deren Nenner gleich ν ist, derartig in zwei Klassen, dafs das Quadrat der zur ersten Klasse gehörigen Zahlen kleiner, das Quadrat jeder Zahl der zweiten Klasse aber gröfser ist als 2. Man kann demnach jedem ganzzahligen Nenner ν eine ganze Zahl α so zuordnen, dafs

$$\frac{\alpha^2}{\nu^2} < 2 < \left(\frac{\alpha + 1}{\nu}\right)^2$$

ist. Da aber für positive rationale Zahlen A, B, C, D aus den Gleichungen $A^2 = B$, $C^2 = D$ und $B > D$ auch $A > C$ folgt, so mufs, wenn dies Gesetz allgemein gültig sein soll, auch die Forderung gestellt werden:

$$\frac{\alpha}{\nu} < \sqrt{2} < \frac{\alpha + 1}{\nu}.$$

Endlich giebt es bei Beschränkung auf positive rationale Zahlen nur eine einzige Zahl A, die bei gegebenem Werte von B der Gleichung genügt: $A^2 = B$; will man dies Gesetz für alle positiven Zahlen B aufrecht erhalten, so mufs man annehmen, die angegebene Einschliefsung stelle nur einen einzigen Wert für $\sqrt{2}$ dar.

Ebenso stellt keine rationale Zahl den Logarithmus von 2 für die Grundzahl 10 dar; aber für jeden Wert von ν läfst sich ein Wert von α derartig bestimmen, dafs ist:

$$10^{\alpha} < 2^{\nu} < 10^{\alpha + 1};$$

man hat also zu setzen:

$$\frac{\alpha}{\nu} < \log 2 < \frac{\alpha + 1}{\nu}.$$

Auf die eigentliche Theorie der Irrationalzahlen können wir hier nicht eingehen; wir begnügen uns mit zwei kurzen Bemerkungen. An erster Stelle weisen wir darauf hin, dafs es nicht notwendig ist, für den Nenner ν alle ganzen Zahlen zu nehmen, dafs es vielmehr genügt, diejenigen auszuwählen, welche Potenzen einer bestimmten Zahl (etwa von 10) sind. Zweitens müssen wir doch den Beweis dafür andeuten, dafs man mit den Irrationalzahlen rechnen kann. Dieser beruht darauf, dafs, wofern für eine Reihe von Zahlen nur gewisse Intervalle gegeben sind, man auch für eine neue, durch die Grundrechnungeu aus ihnen gewonnene Zahl ein Intervall angeben kann, und dafs das letzte Intervall immer mehr eingeschränkt werden kann, sobald man die Intervalle für die ersten Zahlen hinlänglich klein werden läfst. Ist z. B.

$$\frac{\alpha}{\nu} < \mathrm{A} < \frac{\alpha + 1}{\nu}, \quad \frac{\beta}{\mu} < \mathrm{B} < \frac{\beta + 1}{\mu},$$

so hat man für die Summe A + B das Intervall $\frac{\mu + \nu}{\mu\nu}$; um dies Intervall für einen beliebigen Wert von ϱ kleiner als $\frac{1}{\varrho}$ zu machen, hat man nur μ und ν passend zu wählen.

4. Wir haben oben vorausgesetzt, dafs man jede Strecke in ν gleiche Teile zerlegen kann. Umgekehrt erkennt man aber unmittelbar, dafs eine derartige Teilung nur auf eine einzige Weise möglich ist. Demnach ist auch die Länge einer Strecke vollständig bestimmt, wenn ihre Mafszahl für eine gegebene Längeneinheit bekannt und diese Zahl rational ist. Es fragt sich aber, ob bei gegebener Einheitsstrecke auch eine irrationale Mafszahl die Länge einer Strecke bestimmt. Es sei also eine Strecke a gegeben und eine Zahl durch die obige Einschliefsung für jeden Wert von ν definiert. Wir wählen einen Punkt O und tragen in einer festgewählten Richtung die Strecken $\mathrm{OA}_\nu = \frac{\alpha}{\nu}$ und $\mathrm{OA}_\nu' = \frac{\alpha + 1}{\nu}\mathrm{a}$ ab. Wie grofs auch immer die Zahl ν gewählt ist, bleibt stets eine Strecke $\mathrm{A}_\nu \mathrm{A}_\nu'$, auf der der gesuchte Punkt

X liegen mufs. Es fragt sich aber, ob die unendliche Fortsetzung der Einschliefsung oder, wenn man lieber will, die Zusammenfassung des ganzen Prozesses den Punkt X eindeutig bestimmt. Nun giebt es zwei Möglichkeiten: entweder giebt es nur einen Punkt X, der allen diesen Festsetzungen entspricht, oder es giebt eine Strecke BB', in die keine zwei Punkte A_ν und A_ν' hineinfallen. Im letzten Falle müfste die Strecke BB' kleiner sein als die Strecke $A_\nu A_\nu'$. Nun ist $A_\nu A_\nu' = \frac{a}{\nu}$; es müfste also $\nu . BB' < a$ sein, wie grofs man auch die Zahl ν wählen mag. Die Existenz einer solchen Strecke widerspricht aber dem an erster Stelle vorausgesetzten Satze. Sobald also dieser Satz als richtig angenommen wird, gehört nach Wahl der Längeneinheit zu jeder Strecke eine einzige Mafszahl und zu jeder Mafszahl eine bestimmte Strecke.

Der Messung einer geraden Strecke liegen demnach die beiden Voraussetzungen zu Grunde:

a) Wenn eine Strecke b gröfser ist als eine Strecke a, so giebt es immer ein Vielfaches von a, welches gröfser ist als b.

b) Für eine beliebige ganze Zahl ν kann man jede Strecke in ν gleiche Teile zerlegen.

Es erübrigt noch, die Berechtigung dieser beiden Voraussetzungen zu prüfen. Zu dem Ende müssen wir uns mit mehreren Untersuchungen bekannt machen, die teils der älteren, teils der neuesten Zeit angehören.

§ 8.

Die Stetigkeit bei Euklid.

1. Bei einem oberflächlichen Einblick in Euklids Elemente könnte man zu der Meinung kommen, als ob die Stetigkeit für die Geometrie keine Bedeutung habe; denn sie wird dort niemals ausdrücklich erwähnt. Wir müssen uns daher fragen, ob dieser Begriff vielleicht nur rein äufserlich zurücktritt, zugleich aber doch einen wesentlichen Bestandteil vieler Beweise bilde.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir die Art und Weise besprechen, in der Euklid die Konstruktions-Aufgaben behandelt, da diese Aufgaben einerseits überaus zahlreich sind, andererseits vielfach geradezu die Rolle von Existenzbeweisen

spielen. Da tritt uns die auffallende Thatsache entgegen, dafs die Beweise für die Richtigkeit einer Konstruktion stets eine Lücke besitzen, die nur vermittelst des Princips der Stetigkeit ausgefüllt werden kann. Wenn Euklid z. B. über der gegebenen Grundlinie AB ein gleichseitiges Dreieck konstruieren will, so beschreibt er zwei Kreise, die beide die Strecke AB zum Radius haben, und von denen der eine in A, der andere in B einen Mittelpunkt hat; der Schnittpunkt dieser beiden Kreise liefert den dritten Eckpunkt des Dreiecks; aber gerade dafür, dafs die Kreise einander schneiden, fehlt jeder Nachweis.

Überhaupt werden gerade Linie und Kreis in jeder Konstruktions-Aufgabe benutzt. Demnach sollte man denken, dafs die Lehre über den Schnitt eines Kreises mit einer geraden Linie oder mit einem zweiten Kreise besonders eingehend behandelt wäre. Aber dem ist nicht so; gerade diese Teile gehören zu den schwächsten in dem sonst so vorzüglich angelegten Lehrgebäude. Der Beweis des überaus einfachen Satzes, dafs zwei Kreise ganz zusammenfallen, wofern sie den Mittelpunkt und einen Punkt des Umfanges gemeinschaftlich haben, wird in mehrere Teile zerlegt, von denen jeder zahlreiche Erwägungen erfordert. Zwar nimmt die Untersuchung über die gegenseitige Lage zweier Kreise einen bedeutenden Raum ein; aber wir vermissen gerade diejenigen Sätze, die für die Anwendungen am wichtigsten sind; so fehlen die Bedingungen dafür, dafs zwei Kreise zwei oder einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Demnach leiden alle Konstruktionen bei Euklid an der Lücke, dafs man nicht weifs, ob die benutzten Kreise und Geraden einander schneiden. Selbst die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Seiten ist von diesem Mangel nicht frei: wohl wird darauf hingewiesen, dafs jedesmal die Summe zweier Seiten gröfser sein mufs als die dritte; aber den Nachweis, dafs unter dieser Bedingung die Konstruktion stets möglich ist, sucht man vergebens.

Eine ähnliche Lücke findet man in der Stereometrie, wo ohne jeden Versuch eines Beweises sehr häufig von dem Satze Gebrauch gemacht wird, dafs zwei Ebenen entweder parallel sind oder sich in einer geraden Linie schneiden.

2. Die neueren Lehrbücher leiden meistens nicht an dem erwähnten Mangel, indem sie für die soeben erwähnten Sätze

strenge Beweise liefern. Dabei wird aber das Princip der Stetigkeit benutzt. Um z. B. zu zeigen, dafs zwei Kreise einander schneiden, wenn die Entfernung der Mittelpunkte gröfser ist als die Differenz, aber kleiner als die Summe der Radien, beweist man, dafs dem Umfange des zweiten Kreises zwei Punkte A und B angehören, von denen der eine im Innern, der andere im Äufsern des ersten liegt; dann schliefst man weiter: Jeder der beiden von A und B begrenzten Bogen des zweiten Kreises liegt zum Teil im Äufsern und zum Teil im Innern des ersten Kreises; folglich mufs auf jedem Bogen mindestens ein Punkt liegen, der dem Umfang des ersten Kreises angehört. Dafs aber zwei verschiedene Kreise nicht drei Punkte gemeinschaftlich haben können, wird in anderer Weise gezeigt. (Die Änderung, welche für die Polarform des Riemannschen Raumes an dieser Entwicklung angebracht werden mufs, kommt hier nicht in Betracht.)

Der vorhin erwähnte Satz der Stereometrie wird von v. Staudt in folgender Weise ausgesprochen: Zwei Ebenen haben eine gerade Linie gemeinschaftlich, sobald sie sich in einem Punkte treffen. Zum Beweise zieht er durch den gemeinschaftlichen Punkt A in der ersten Ebene zwei Gerade, die der zweiten nicht angehören. Jede dieser Geraden wird durch den Punkt A in zwei Halbgerade geteilt, die auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene liegen. Demnach kann man in der ersten Ebene die Halbgeraden AB und AC so wählen, dafs sie nicht derselben Geraden angehören und auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene liegen. Zieht man die Strecke BC, so findet auf ihr ein Übergang von der einen Seite zur andern, also auch ein Schnitt mit der zweiten Ebene statt. Dafs der Schnittpunkt beiden Ebenen angehört, diese also eine gerade Linie, aber keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich haben, folgt aus den allgemeinen Eigenschaften der Ebene.

3. Ich erachte es nicht für notwendig, das Princip der Stetigkeit in voller Allgemeinheit auszusprechen. Für die meisten Anwendungen genügt folgende Form: Eine Linie gehöre ganz einem Gebilde an, das in zwei Teile zerlegt ist; wenn dann die Linie mit jedem Teile mindestens einen Punkt gemeinschaftlich hat, so mufs sie auch die Grenze treffen. Auch folgende Form läfst sich sehr häufig anwenden: Bewegt sich ein Punkt in einem Gebilde, das in zwei Teile zerlegt ist, und gehört er bei Beginn der

Bewegung dem einen und beim Ende der Bewegung dem andern Teile an, so mufs er während der Bewegung mindestens einmal auf die Grenze der beiden Teile gelangen.

4. Dies Axiom liefert uns den Nachweis für den einen der beiden Sätze, die wir im vorigen Paragraphen vorausgesetzt haben, indem sich mit seiner Hilfe zeigen läfst, dafs jede Strecke in beliebig viele gleiche Teile zerlegt werden kann. Um z. B. die Möglichkeit der Halbierung zu erkennen, ohne die bekannte Konstruktion zu benutzen, nehme man auf der Strecke AB einen beliebigen Punkt C an; dann ist entweder $AB = BC$, oder einer der beiden Teile ist gröfser als der andere. Ist $AC > CB$, so mache man $AD = CB$ und findet $AD < DB$. Läfst man einen Punkt X von D nach C sich bewegen und macht $AY = 2AX$, so bewegt sich zugleich Y von E nach F, wo E der Strecke AB angehört, F über B hinaus liegt. Es mufs also Y den Punkt B erreichen, und der zu dieser Lage von Y gehörende Punkt X ist die Mitte von AB.

Hiernach kann man jede Strecke in ν gleiche Teile zerlegen, wofern ν eine Potenz von 2 ist. Für eine andere Zahl ν suche man eine Potenz von 2, die gröfser ist als ν. Da es solche Potenzen von 2 giebt, kann man durch wiederholte Halbierung eine Strecke AG finden, die, ν-mal als Summand gesetzt, eine Strecke liefert, welche kleiner ist als AB. Dann ist offenbar νGB gröfser als AB. Somit läfst sich der für $\nu = 2$ angegebene Beweis für jedes ν durchführen.

Wofern man den angeführten Satz auf diese oder eine ähnliche Weise beweist, beruht jeder geometrische Lehrsatz, bei dem eine Messung benutzt wird, auf dem Axiom der Stetigkeit. Das gilt in Euklids Lehrgebäude für die ganze Ähnlichkeitslehre, sowie auch, worauf wir kurz hinweisen wollen, für die analytische Behandlung der Geometrie. Daran ändert sich auch nichts, wenn man, statt die Möglichkeit der Zerlegung nur principiell herzuleiten, den ν^{ten} Teil einer Strecke direkt durch eine Konstruktion vermittelt, da der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion das angegebene Axiom ebenfalls benutzt.

5. Wenn das Axiom der Stetigkeit in der Geometrie nicht entbehrt werden kann, so ist es offenbar gestattet, dasselbe auch in solchen Fällen anzuwenden, wo es zwar nicht unbedingt not-

wendig ist, wo seine Benutzung aber dazu dient, einen Beweis wesentlich zu vereinfachen. Das geschieht auch vielfach in neueren Werken. So kennt jeder die Schwierigkeiten, die bei der gewöhnlichen Behandlung der Beweis des Satzes macht: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, der eingeschlossene Winkel im ersten aber gröfser ist als im zweiten, so ist auch die dritte Seite im ersten gröfser als im zweiten. Der gebräuchliche Beweis unterscheidet drei Fälle, von denen jeder zahlreiche Schlüsse bedarf. Dagegen wird der Beweis sehr einfach, wenn man das angegebene Axiom benutzt, worüber man etwa das Lehrbuch der Stereometrie von Schwering vergleichen wolle.

§ 9.

Der Verhältnisbegriff bei Euklid.

1. Indem die neuere Zeit den Zahlbegriff so erweitert hat, dafs er auch gebrochene und irrationale Zahlen umfafst, führt sie den Begriff des Verhältnisses auf den der Mafszahl zurück. Um das Verhältnis zweier Gröfsen zu bestimmen, mifst man beide durch dieselbe dritte, mit ihnen gleichartige Gröfse und dividiert die Mafszahl der ersten durch die der zweiten. Dabei ist nur zu zeigen, was keine Schwierigkeit macht, dafs der Quotient von der als Einheit gewählten Gröfse unabhängig ist. Man kann daher geradezu die zweite Gröfse zur Einheit wählen und dann das Verhältnis der ersten zur zweiten als die Mafszahl definieren, welche man für die erste Gröfse erhält.

Es verdient des folgenden wegen bemerkt zu werden, dafs die Teilung, die wir bei der Messung benutzt haben, durch Vervielfältigung ersetzt werden kann. Ist z die Mafszahl einer Gröfse A durch eine Gröfse B (oder das Verhältnis von A zu B), so zerfallen für einen irrationalen Wert von z die sämtlichen Brüche mit dem Nenner ν in zwei Klassen derart, dafs die Brüche der ersten Klasse kleiner, die der zweiten gröfser sind als z. Ist aber $\frac{\alpha}{\nu} < z$, so ist $\alpha . B < \nu A$, und für $\frac{\beta}{\nu} > z$ ist $\beta B > \nu A$. Bei einem rationalen Werte von z kann sein $\frac{\alpha}{\nu} = z$, und zugleich $\alpha . B = \nu A$. Wenn also zwei Paare gleichartiger Gröfsen A und B, C und D gegeben sind, und wenn mit der Ungleichheit

$\alpha . B < \nu . A$ jedesmal die Ungleichheit $\alpha . D < \nu . C$, und mit $\alpha B > \nu A$ stets $\alpha . D > \nu . C$ und mit der Gleichheit $\alpha . B = \nu . A$ auch $\alpha . D = \nu . C$ verbunden ist, so ist die Maſszahl von A für die Einheit B gleich der Maſszahl von C durch D; oder die Gröſsen A und B haben zu einander dasselbe Verhältnis wie C und D.

2. Nach dieser Vorbereitung gehen wir dazu über, die Art, wie Euklid das Verhältnis behandelt, kurz darzulegen, indem wir den Leser, der sich genauer mit dieser Theorie bekannt machen will, auf die eingehende Erörterung verweisen, die Herr Stolz im ersten Bande seiner »allgemeinen Arithmetik« giebt. Vor allem kommt es auf drei Definitionen an, die im Anfange des fünften Buches die dritte, vierte und fünfte Stelle einnehmen, und die folgendermaſsen lauten:

»Verhältnis ist eine gewisse Beziehung zweier gleichartiger Gröſsen auf einander hinsichtlich ihrer Gröſse.«

»Ein Verhältnis zu einander haben Gröſsen, welche vervielfältigt einander übertreffen können.«

»Die Gröſse A hat zu B dasselbe Verhältnis wie C zu D, wenn von beliebigen, aber gleichen Vielfachen der ersten und dritten und beliebigen gleichen Vielfachen der zweiten und vierten, die Vielfachen der ersten und dritten zugleich entweder kleiner oder ebensogroſs oder gröſser sind als die Vielfachen der zweiten und vierten, nach der Ordnung mit einander verglichen.«

Daſs Euklid von seiner Definition des Verhältnisses nicht befriedigt ist, geht aus der Form deutlich hervor. Über die an zweiter Stelle mitgeteilte Definition wollen wir nachher sprechen, nachdem wir einige Worte über die letzte Definition gesagt haben. Um zu erkennen, ob das Verhältnis der Gröſsen A und B dasselbe sei, wie das der Gröſsen C und D, giebt Euklid folgende Vorschrift: Man wähle alle Zahlenpaare α und ν und bilde die Gröſsen $\alpha . B$, $\alpha . D$, $\nu . A$, $\nu . C$; sollen jetzt die Verhältnisse gleich sein, so muſs jedesmal, wenn $\alpha . B > \nu . A$ ist, auch $\alpha . D > \nu . C$ sein; ebenso muſs für jedes Zahlenpaar (α, ν), für welches $\alpha . B < \nu . A$ ist, $\alpha . D < \nu C$ sein, und mit der Gleichheit $\alpha . B = \nu . A$ muſs stets die Gleichheit $\alpha . D = \nu . C$ verbunden sein. Nur wofern diese Bedingungen für alle Zahlenpaare erfüllt sind, haben die Gröſsen dasselbe Verhältnis.

Nachdem diese Definition als berechtigt anerkannt ist, wird allerdings, wie wir beiläufig erwähnen möchten, die zuerst angeführte Definition Euklids in etwa entbehrlich; denn es kommt vor allem darauf an, dafs man über die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Verhältnisse Aufschlufs geben kann, und das wird durch diese Definition und die ihr folgende, die ähnlich lautet, geleistet. Aber an sich macht die Definition durchaus den Eindruck der Willkür, da eine Prüfung verlangt wird, bei der man alle Paare von ganzen Zahlen benutzen mufs; ja, man ist von vornherein nicht sicher, ob die angegebenen unendlich vielen Forderungen mit einander vereinbar sind. Erst die oben entwickelte Art der Messung führt uns in das Verständnis dieser Definition ein.

3. Beim Beweise der Sätze über Proportionen sind zwei Methoden bei Euklid besonders beliebt. An vielen Stellen wendet er die angegebene Definition direkt an. Wenn er z. B. zeigen will, dafs zwei Dreiecke A und B von gleicher Höhe sich ihrem Inhalte nach wie ihre Grundlinien a und b verhalten, so multipliziert er die Grundlinie a des ersten mit einer beliebigen Zahl ν und die Grundlinie b des zweiten mit einer beliebigen Zahl α und konstruiert über den neuen Grundlinien jedesmal Dreiecke mit der gegebenen Höhe; da jetzt für $\nu \cdot a > \alpha \cdot b$ auch $\nu \cdot A > \alpha \cdot B$ ist u. s. w., so folgt die Wahrheit des Satzes aus der mitgeteilten Definition. Vielfach wendet aber Euklid das indirekte Beweisverfahren an. Um zu beweisen, dafs sich A : B wie C : D verhält, nimmt er an, die beiden ersten Gröfsen verhielten sich wie C zu einer neuen Gröfse E, und zeigt, dafs E weder gröfser noch kleiner sein kann als D. In neuerer Zeit wendet man das letzte Verfahren noch viel häufiger an, namentlich, wenn das Verhältnis irrational ist. Ich halte es für natürlicher, die Messung beim Beweise zu verwenden und etwa die Mafszahl als Decimalzahl vorauszusetzen; ich habe gefunden, dafs bei dieser Methode auch das Verständnis wesentlich erleichtert wird.

4. Vergleicht man die beiden ersten oben von uns angeführten Definitionen Euklids mit einander, so erkennt man, dafs die zweite ein wesentliches Merkmal gleichartiger Gröfsen angeben will. Aus den Anwendungen, die Euklid von dieser Definition macht, ersieht man, dafs der Sinn in folgender Weise angegeben werden kann:

Sind A und B gleichartige Gröfsen, so sind sie

a) entweder gleich oder die eine ist gröfser als die andere,

b) auch für zwei beliebige Zahlen α und β sind die Gröfsen $\alpha . A$ und $\beta . B$ entweder gleich oder ungleich;

c) ist $B < A$, so giebt es jedenfalls eine Zahl μ so, dafs $\mu . B > A$ ist.

Gerade auf den dritten Punkt kommt es Euklid an; denn während die beiden ersten Teile der Definition nicht weiter benutzt werden, schliefst er aus dem dritten Teile, im ersten Satze des zehnten Buches, dafs, wenn zwei ungleiche gleichartige Gröfsen gegeben sind, man durch wiederholte Halbierung der gröfseren zu einer Gröfse gelangt, die kleiner ist als die andere. Dafs die Alten derartigen Sätzen bereits ihr Augenmerk zuwandten, kann kaum genug bewundert werden. Indessen dürfen wir uns nicht verhehlen, dafs hier ein neues Axiom in die Geometrie eingeführt ist oder doch ein Satz aufgestellt wird, dessen Herleitung aus den übrigen Voraussetzungen nicht geringen Schwierigkeiten unterliegen dürfte. Denn nur solche Gröfsen als gleichartige zu betrachten, die den angegebenen drei Forderungen genügen, ist nicht gestattet. So sind zwei beliebige (gerade) Strecken ohne Zweifel gleichartige Gröfsen; dafs aber bei zwei ungleichen Strecken stets ein gewisses Vielfache der kleineren gröfser ist als die gröfsere, ist nicht von vornherein klar. Welche Wichtigkeit die Alten diesem Princip beilegten, ersieht man aus einem Werk, das nur wenig jünger ist als die Elemente Euklids. Archimedes schickt nämlich seinem ersten Buche über Kugel und Cylinder ohne Beweis mehrere Sätze voraus, von denen der fünfte nach der von Heiberg mitgeteilten lateinischen Übersetzung folgenden Wortlaut hat:

Inter lineas inaequales et inaequales superficies et inaequalia solida maius excedere minus eiusmodi magnitudine, quae ipsa sibi addita quamvis magnitudinem datam earum, quae cum ea comparari possint, excedere possit.

Herr Stolz, der in neuerer Zeit zuerst auf die Wichtigkeit dieses Satzes hingewiesen haben dürfte, nennt ihn den Archimedischen Grundsatz und giebt ihm folgenden Ausspruch:

»Eine Gröfse kann so oft vervielfältigt werden, dafs sie jede andere mit ihr gleichartige übertrifft.«

Es ist dies die erste Voraussetzung, die wir bei der Messung der Strecken benutzt haben. Als Ergebnis der §§ 4—8 können wir demnach hinstellen, dafs, wofern diese Voraussetzung für Strecken gilt, sie auch allgemein bei gleichartigen Gröfsen gültig bleibt. Indem wir zur weiteren Prüfung dieser Voraussetzung übergehen, bemerken wir, dafs die Untersuchung, ob wir es mit einem neuen Axiom oder mit einem aus den übrigen geometrischen Voraussetzungen folgenden Lehrsatz zu thun haben, noch nicht abgeschlossen ist; wir müssen uns daher damit begnügen, in den folgenden §§ den Stand der Frage darzulegen.

§ 10.

Cantors transfinite Zahlen.

1. Herr Cantor [7]) betrachtet an erster Stelle die Reihe der realen ganzen Zahlen

$$\text{(I)} \quad 1, 2, 3 \ldots \nu \ldots$$

und legt ihr die erste Mächtigkeit bei. Indem er die negativen Zahlen aufser acht läfst, nimmt er zunächst die gebrochenen Zahlen hinzu. Dabei schreibt er der Gleichförmigkeit wegen auch die ganzen Zahlen in der Form $\frac{\mu}{\nu}$ (für $\nu = 1$) und setzt fest, dafs μ und ν keinen gemeinschaftlichen Teiler (aufser eins) haben. Er setzt $\mu + \nu - 1 = \mathrm{N}$ und bezeichnet die Zahl N als die Höhe der gebrochenen Zahl. Zu $\mathrm{N} = 1$ gehört nur die eine Zahl $\frac{1}{1}$, zu $\mathrm{N} = 2$ gehören die Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{1}$, zu $\mathrm{N} = 3$ die Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{1}$, zu $\mathrm{N} = 4$ bereits $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$ u. s. w. Jetzt ordne man die rationalen Zahlen nach ihrer Höhe und die zu derselben Höhe gehörigen Zahlen nach ihrer natürlichen Gröfse. Dadurch erhält man eine feste Ordnung, die mit folgenden Zahlen beginnt:

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1} \text{ u. s. w.}$$

Indem man jeder Rationalzahl diejenige ganze Zahl zuordnet, welche angiebt, welchen Platz sie bei dieser Anordnung erhält, erkennt man, dafs man die Gesamtheit der rationalen Zahlen in eindeutige umkehrbare Beziehung zu den natürlichen Zahlen bringen kann.

Cantor zeigt aber, dafs derselbe Satz auch für die Gesamtheit der (reellen positiven) algebraischen Zahlen gilt. Jede algebraische Zahl σ genügt nämlich einer Gleichung von der Form:

$$\alpha_0\sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

wo $a_0, a_1 \ldots a_n$ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, und wo es gestattet ist, die Gleichung als irreducibel vorauszusetzen. Indem mit $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ die absoluten Beträge der Koefficienten $a_0, a_1 \ldots a_n$ bezeichnet werden, bestimmt Herr Cantor die Höhe N dieser algebraischen Zahl σ durch die Festsetzung:

$$N = n - 2 + \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Dann giebt es zu jedem ganzzahligen positiven Werte von N nur eine endliche Anzahl φ (N) von algebraischen reellen Zahlen, deren Höhe gleich N ist. So ist $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$ u. s. w. Die zu derselben Höhe gehörigen Zahlen ordne man nach ihrer Gröfse und lasse auf die zur Höhe N gehörigen Zahlen diejenigen Zahlen folgen, deren Höhe gleich $N + 1$ ist. Demnach beginnt die Reihe mit den Zahlen 1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 3. Indem man in gleicher Weise fortschreitet, ist es möglich, alle algebraischen Zahlen in eine unendliche Reihe einzuordnen; sie besitzen also ebenfalls die erste Mächtigkeit.

2. Dagegen ist es, wie Cantor bewiesen hat, nicht möglich, die sämtlichen Werte eines Continuums auf die Reihe der natürlichen Zahlen eindeutig zu beziehen. Es würde zu viel Raum beanspruchen, wenn wir versuchen wollten, diese Behauptung hier zu beweisen; für unsern Zweck genügt es, kurz die Ergebnisse zu erwähnen, zu denen Hr. Cantor durch äufserst scharfsinnige Untersuchungen geführt ist.

Wir erinnern zunächst an einen Satz, den wir im dritten Abschnitt (Erster Band S. 168) bewiesen haben. Diesen Satz, den wir dort auf einen speciellen, geometrisch besonders hervortretenden Fall eingeschränkt haben, wollen wir hier ganz allgemein und in rein analytischer Form aussprechen:

»Wir betrachten diejenigen Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$, für welche jede einzelne Variabele einen positiven Wert hat, für den ist $x_1 \leqq a_1, \ldots x_n \leqq a_n$, wo $a_1 \ldots a_n$ gegebene positive Werte sind; zugleich lassen wir die Variabele y alle reellen Werte zwischen 0 und 1 annehmen; dann ist es möglich, die sämtlichen

Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$ derartig den Werten y zuzuordnen, dafs jedem Wertsystem ein einziger Wert von y und umgekehrt jedem Werte von y ein einziges Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ entspricht.«

Die Gesamtheit aller reellen Zahlwerte, die zwischen zwei festen Grenzen liegen, bezeichnet Cantor als ein Continuum; der mitgeteilte Satz zeigt, dafs die Mächtigkeit des Continuums dieselbe ist wie die von Wertsystemen, die sich auf entsprechende Weise bei beliebig vielen Variabeln bilden lassen. Stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten haben sonach immer dieselbe Mächtigkeit, die über die erste Mächtigkeit hinausgeht, die aber, wie Cantor zeigt, auf die erste Mächtigkeit folgt und deshalb von ihm als die zweite Mächtigkeit bezeichnet wird.

3. Nun sucht Cantor die natürliche Zahlenreihe so zu erweitern, dafs die Darstellung des Continuums möglich wird. Zu dem Ende stellt er folgende Betrachtungen an.

Während in der Zahlenreihe

$$\text{(I)} \quad 1, 2, 3 \ldots \nu \ldots$$

keine gröfste Zahl existiert, denkt er eine neue Zahl ω, um auszudrücken, dafs der ganze Inbegriff (I) in seiner natürlichen Succession dem Gesetze nach gegeben ist. Auf die Setzung der Zahl ω läfst er weitere Setzungen der Einheit folgen und erhält dadurch die Zahlen

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots \omega + \nu, \ldots$$

von denen es keine gröfste giebt, auf deren Gesamtheit aber eine neue Zahl 2ω folgt, von der aus man zu der Fortsetzung

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \ldots 2\omega + \nu, \ldots$$

kommt. Weiter gewinnt man auf diesem Wege die Zahlen:

$$3\omega, 3\omega + 1 \ldots 3\omega + \nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega, \mu\omega + 1 \ldots \mu\omega + \nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die keinen Abschlufs erzielen, so dafs man genötigt ist, auf alle Zahlen $\mu\omega + \nu$ eine Zahl ω^2 folgen zu lassen und demgemäfs nicht nur die Zahlen

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu,$$

sondern allgemein die Zahlen

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \nu_2\omega^{\mu-2} + \ldots + \nu_{\mu-1}\,\omega + \nu_\mu$$

folgen zu lassen, wo μ, ν_0, ν_1 . . . ν_μ alle endlichen positiven ganzen Zahlwerte mit Ausschlufs der Verbindung $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_\mu = 0$ anzunehmen haben. Diese Menge läfst sich auf ähnliche Weise, wie die Gesamtheit der reellen algebraischen Zahlen, in die Form einer einfach unendlichen Reihe bringen und hat daher die Mächtigkeit von (I). Wir setzen demnach die Reihe noch fort, indem wir eine neue Zahl ω^ω setzen und die zweite Zahlenklasse als den Inbegriff aller in der angegebenen Weise zu bildenden Zahlen α definieren, die in der bestimmten Succession

$$1, 2 \ldots \omega, \omega + 1 \ldots \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_\mu \ldots \omega^\omega \ldots \alpha \ldots$$

fortschreiten und der Bedingung unterworfen sind, dafs alle der Zahl α vorangehenden Zahlen eine Menge von der Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse bilden. Von dieser neuen Zahlenklasse zeigt Cantor, dafs sie die Mächtigkeit des Continuums besitzt, dafs ihre Mächtigkeit von der der ersten Zahlenklasse verschieden ist, aber unmittelbar auf die der ersten Zahlenklasse folgt.

Alle mit Hilfe der neuen Zahl ω gebildeten Zahlen fafst Cantor unter dem Namen von transfiniten Zahlen zusammen. Auch ist es ihm möglich, für das Rechnen mit solchen Zahlen allgemeine Regeln aufzustellen. Nur gelten hier ganz andere Gesetze als beim Rechnen mit den gewöhnlichen Zahlen; so ist z. B.

$$(\omega + \nu) + \lambda = \omega + \lambda, \ \lambda + (\omega + \nu) = \omega + \nu, \ (\omega + \nu) + (\omega + \lambda) = 2\omega + \lambda.$$

4. Indessen ist es nicht nötig, näher auf die Cantorsche Theorie einzugehen. Die Frage, ob man die gerade Strecke über das Unendliche hinaus verlängern dürfe, interessiert uns hier weniger. Dagegen wünschen wir vor allem die Frage beantwortet: Gelangt man durch eine hinreichend oft fortgesetzte Halbierung einer Strecke notwendig zu einer Strecke, die kleiner ist als eine beliebig klein gewählte Länge, oder ist die Annahme gerechtfertigt, dafs man bei dieser Operation stets eine Strecke erhält, die eine gegebene Strecke an Länge übertrifft? Cantor ist der Überzeugung, dafs sich diese Frage mit Hilfe seiner transfiniten Zahlen beantworten lasse, und dafs man mit Notwendigkeit zu der Annahme Euklids geführt werde, nach welcher die kleinere von zwei gleichartigen Gröfsen hinreichend oft vervielfältigt die gröfsere übertrifft. Demnach erblickt er »in dem sog. Archimedischen

Axiom gar kein Axiom, sondern einen aus dem linearen Gröfsenbegriff mit logischem Zwange folgenden Satz.« Er spricht diesen Satz in folgender Weise aus:

»Von null verschiedene lineare Zahlgröfsen (d. h. kurz gesagt, solche Zahlgröfsen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken darstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröfse, giebt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröfse.«

Cantor hat den vollständigen Beweis für seinen Satz leider nicht veröffentlicht, aber wenigstens den leitenden Gedanken angegeben. Er geht von der Voraussetzung einer Gröfse aus, deren ν-faches für jede noch so grofse endliche ganze Zahl ν kleiner ist als die Einheit und beweist, dafs auch das α-fache der Zahl kleiner ist als die Einheit, wofern α eine noch so grofse transfinite Zahl ist.

§ 11.

Eine zweite Erweiterung des Zahlgebietes.

1. Wir betrachten eine projektive Umgestaltung einer geraden Linie, bei der zwei reelle Punkte P und Q in Ruhe gehalten werden. Durch diese Umgestaltung werde der Punkt A_0, der zwischen P und Q liegt, nach A_1 übergeführt; zugleich werde der Punkt A_1 in die Lage A_2, A_2 nach A_3 . . . A_{n-1} nach A_n gebracht. Umgekehrt sei A_{-1} derjenige Punkt, der durch die angegebene Operation in die Anfangslage von A_0 kommt; ebenso gelange A_{-2} nach A_{-1}, . . . A_{-n-1} nach A_{-n}. Hierdurch ist jeder ganzen Zahl ein Punkt zwischen P und Q eindeutig zugeordnet. Der Addition und Subtraktion entsprechen gewisse projektive Transformationen, wobei die gewöhnlichen Rechnungs-Gesetze bestehen bleiben. Auch ist es leicht, diese Zuordnung derartig zu erweitern, dafs man auch allen reellen Zahlen einen Punkt zuordnet; hierbei entspricht der Reihenfolge der Punkte die Folge der Zahlen, und die gewöhnlichen Rechenoperationen ändern sich nicht. Unter Annahme des Archimedischen Axioms läfst sich so jedem Punkte zwischen P und Q eine einzige Zahl und jeder Zahl ein einziger Punkt der gewählten Strecke zuordnen. Will man aber auch den übrigen Punkten der Geraden Zahlen

zuordnen, und soll die Zuordnung eindeutig sein, so mufs man das Gebiet der Zahlen erweitern.

2. An dieser Betrachtung bringen wir eine kleine Änderung an, die uns eine unbegrenzte Erweiterung gestattet.[8]) Durch die Gleichung:

$$(1)\quad v = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$$

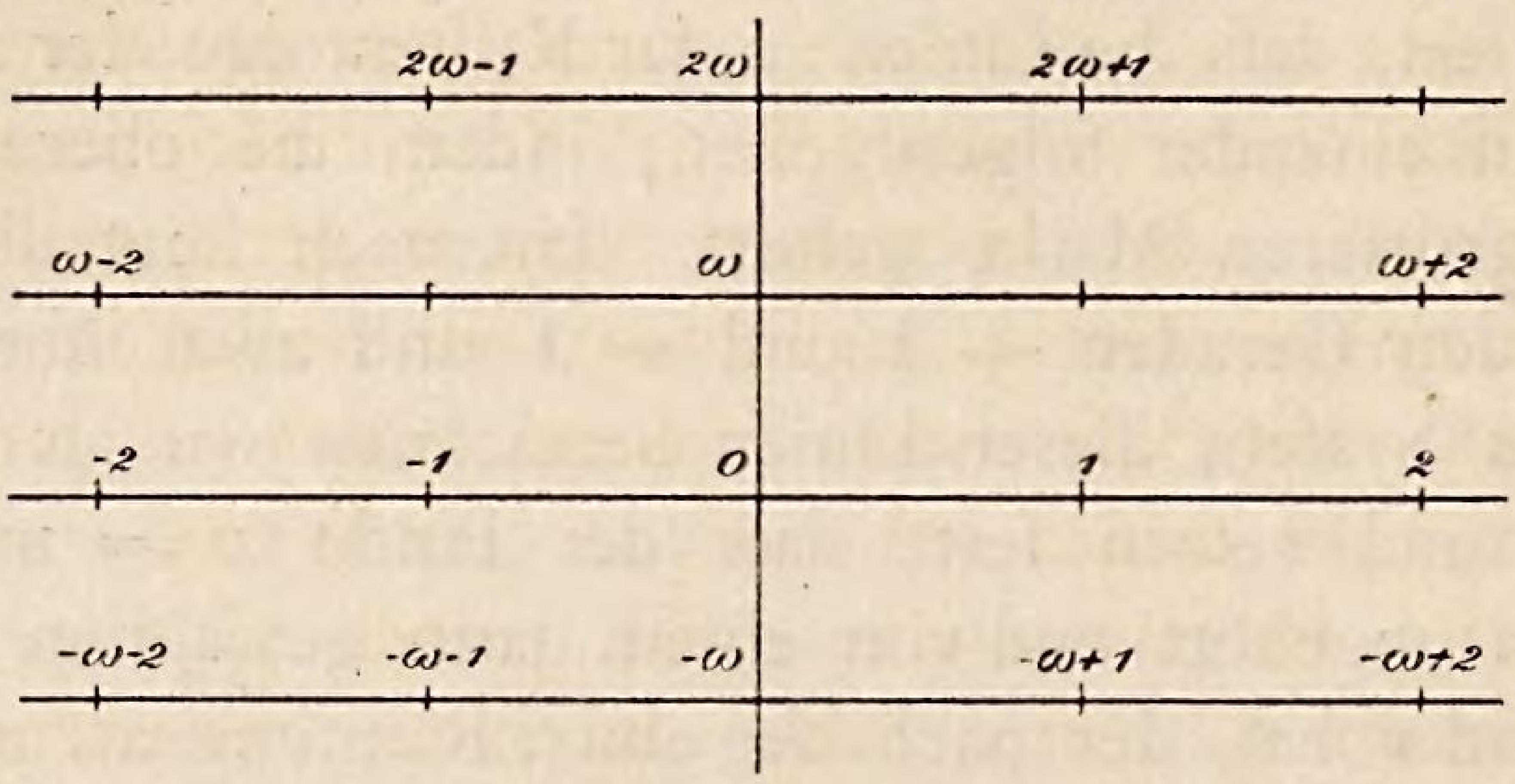
werden den Werten von u, die zwischen + 1 und — 1 liegen, die sämtlichen reellen Werte von v zugeordnet. Um diese Gleichung aber auch für die übrigen Werte von u zur Festsetzung einer eindeutigen Beziehung zwischen u und v zu benutzen, führe man eine neue Zahl ω ein, die dem gewöhnlichen Zahlgebiete nicht angehört, bilde aus ihr durch Addition und Subtraktion der gewöhnlichen Zahlen ν die Zahlen $\omega \pm \nu$, die unter einander und von den gewöhnlichen Zahlen verschieden sind, und treffe folgende Festsetzung: Dem Werte $v = \omega$ ordne man den Wert $u = 2$ und jedem Werte $\omega + \nu$ einen Wert von u zu, der zwischen + 1 und + 3 liegt und der der Gleichung $\nu = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$ genügt. Dadurch ist auch die Zuordnung innerhalb dieses Bereiches von u eindeutig. Nur dem Werte $u = 1$ ist kein endlicher Wert von v zugeordnet; man läfst diesem Werte von u den Wert $v = +\infty$ entsprechen und setzt deshalb, da 1 sowohl gleich $0 + 1$ wie gleich $2 - 1$ ist, fest, dafs der Wert $+\infty$ auch durch die Subtraktion $\omega - \infty$ erhalten werden soll oder dafs ist: $\omega = 2\infty$.

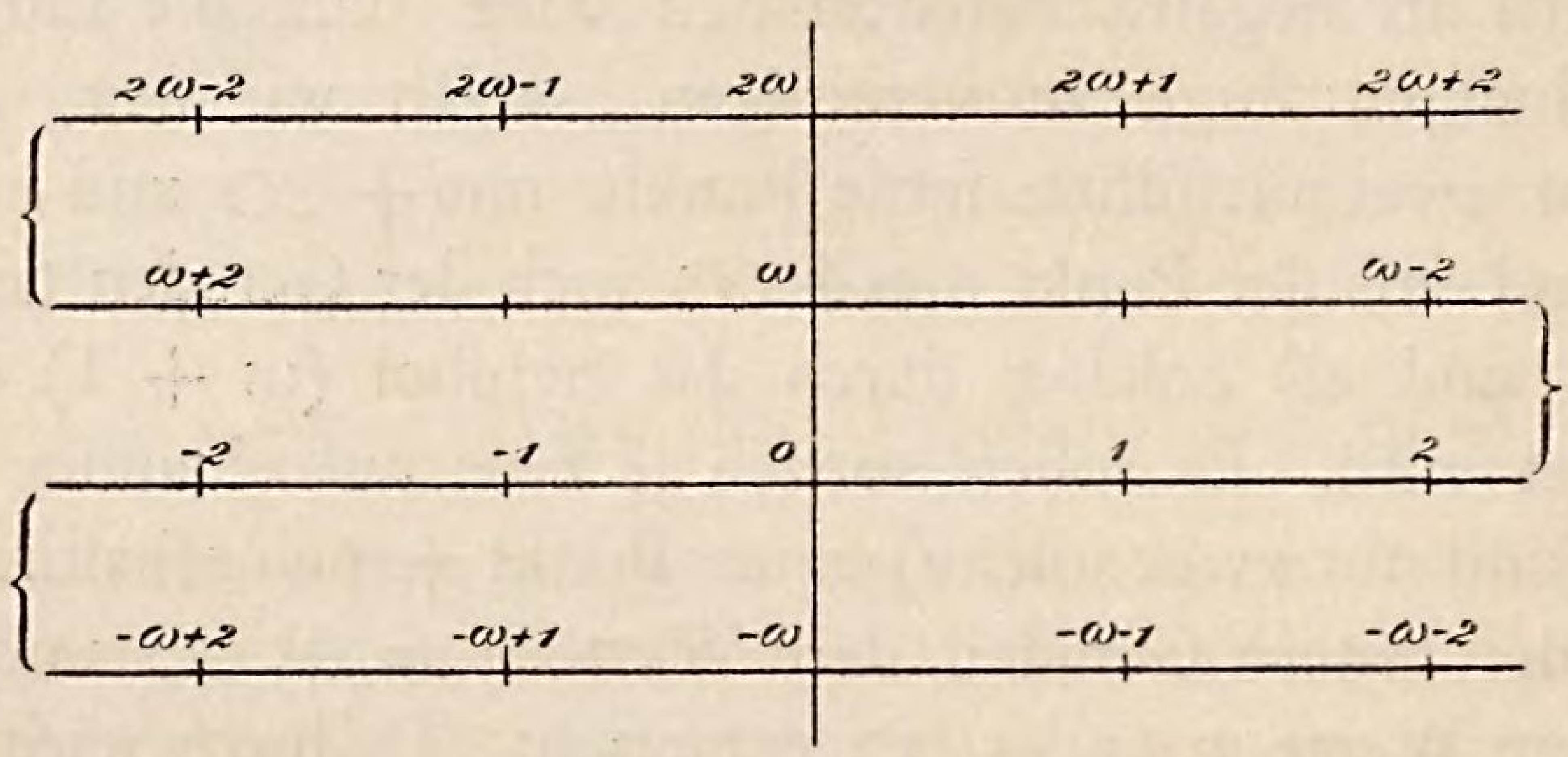
In ähnlicher Weise kann man unbegrenzt fortfahren. Versteht man unter m irgend eine positive oder negative ganze Zahl und nimmt an, dafs u zwischen $2m + 1$ und $2m - 1$ liegt, so bilde man die Zahlen $m\omega + \nu$ für beliebige endliche Werte von ν und ordne jedem Werte von u zwischen $2m + 1$ und $2m - 1$ diejenige Zahl $v = m\omega + \nu$ zu, für welche $\nu = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$ ist. Zugleich entspricht dem Werte $u = 2m + 1$ der Wert $v = m\omega + \infty = (2m + 1)\infty$. Hierdurch ist eine eindeutige und, wenn man will, stetige Zuordnung der Werte u und v erreicht, wo man für u jede (rationale oder irrationale) Zahl des gewöhnlichen Zahlgebiets wählen kann.

3. Um diese Zuordnung möglichst zur Anschauung zu bringen, ziehe man in einer euklidischen Ebene eine Reihe von unendlich vielen parallelen Geraden, die einander jedesmal in gleichem Abstande folgen. Jeder Geraden ordne man eine Marke m zu, wo m alle ganzzahligen positiven und negativen Werte erhalten soll, und setze fest, dafs die Linien in der Reihenfolge der zugehörigen Marken auf einander folgen sollen, indem die obere Linie auch stets zur gröfseren Marke gehört. Hiernach liegt die Gerade 0 zwischen den Geraden $+1$ und -1 und zwar über der Linie -1. Das System dieser Linien bezeichnen wir als System der Linien V und setzen fest, dafs der Punkt $v = m\omega + \nu$ der Geraden m angehört und von einem darin gewählten Punkte $m\omega$ den Abstand ν hat, der nach der einen Richtung als positiv, nach der andern als negativ angenommen wird. Um die Linien V zu einem einzigen Zuge zu vereinigen, setzen wir fest, dafs jede Gerade m zwei unendlich ferne Punkte $m\omega + \infty$ und $m\omega - \infty$ besitzt und dafs der Punkt $m\omega + \infty$ auch der Geraden $(m + 1)\,\omega$ angehört und als solcher durch das Symbol $(m + 1)\,\omega - \infty$ bezeichnet wird. Es sollen sonach je zwei auf einander folgende Gerade (und nur zwei solche) einen Punkt gemeinschaftlich haben, der auf der untern Geraden dem Werte $\nu = + \infty$ und auf der obern dem Werte $\nu = - \infty$ entspricht. Dadurch wird erreicht, dafs das System V einen einzigen zusammenhangenden Zug bildet.

Um die Vorstellung zu fixieren, lassen wir die Punkte $m\omega$ sämtlich auf derjenigen Senkrechten liegen, welche im Punkte $v = 0$ auf der Geraden $m = 0$ errichtet wird. Zugleich soll die Längeneinheit auf allen Geraden gleich grofs gewählt werden. Betreffs der Richtung, in der wir auf den einzelnen Geraden die positiven und negativen Zahlen ν den Punkten der Geraden m zuordnen, können wir zwei Anschauungen bilden, von denen jede ihre Vorzüge und Mängel besitzt. Bei der ersten Anschauung nehmen wir die positive Richtung auf allen Geraden übereinstimmend an; dann liegen alle Punkte $m\omega + \nu$, für welche ν denselben Wert hat, senkrecht über einander, und nur beim Übergange von einer Geraden zur andern mufs man jedesmal den Punkt auf die andere Seite übertreten lassen. Man kann aber auch festsetzen, dafs der Übergang von einer Geraden zur andern stets auf derselben Seite erfolgt; dann hat man die positive

Richtung in zwei auf einander folgenden Geraden jedesmal entgegengesetzt zu wählen. Hiernach trifft die im Punkte ν auf der Geraden $m = 0$ errichtete Senkrechte jede Gerade, welche zu einer ungeraden Marke m gehört, im Punkte $m\omega - \nu$, und nur die Geraden, für welche die Marke m gerade ist, im Punkte





$m\omega + \nu$. Die erste Vorstellung wird durch die Figur 5, die zweite durch die Figur 6 angedeutet.

Jetzt läfst man die Gröfse u alle gewöhnlichen Zahlwerte auf einer festen Linie U annehmen; liegt u zwischen $2m - 1$ und $2m + 1$, und ist $\nu = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$, so soll dem Werte u der Wert $v = m\omega + \nu$ entsprechen. Dadurch ist jedem Punkte der Linie U ein einziger Punkt des Linienzuges V so zugeordnet, dafs auch jedem Punkte von V ein einziger Punkt von U entspricht.

4. In ähnlicher Weise können wir fortfahren, indem wir mit der Gleichung (1) die Gleichung verbinden:

$$(2) \quad w = \operatorname{tg} \frac{v\pi}{2}.$$

Wir setzen fest, dafs dem Werte $w = 0$ die Werte $v = 0$, $u = 0$ entsprechen; lassen wir dann w, v, u sich stetig ändern, so ordnen wir jedem reellen Werte von w zwischen $+\infty$ und $-\infty$

einen Wert von v zu, der zwischen + 1 und — 1 liegt, so dafs der entsprechende Wert von u zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ eingeschlossen ist. Jedem Werte von u, der zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, entspricht ein Wert von v, der gröfser ist als eins. Diesem ordnen wir, entsprechend der obigen Festsetzung, einen Wert $w = m\omega + \nu$ zu, wo m alle ganzzahligen positiven Werte und ν alle reellen Werte zwischen $\pm\infty$ (mit Einschlufs der Grenzen) annehmen darf. Der zu $u = 2$, $v = \omega$ gehörige Wert von w mufs einem neuen Gebiet angehören; wir wollen ihm das Zeichen ω^2 beilegen. Mit Hilfe dieses Zeichens bilden wir für ganzzahlige Werte von l die Zahlen $l\omega^2$, welche dem Werte $v = l\omega$, $u = 2l$ entsprechen. Ist nun u eine reelle, jedoch nicht ganze Zahl, so bestimme man die ganze Zahl l durch die Festsetzung,

$$2l + 1 > u > 2l - 1,$$

die Zahl m durch die Forderung

$$2m + 1 > \operatorname{tg}\frac{u\pi}{2} > 2m + 1,$$

und die Zahl ν durch die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{v\pi}{2} = \nu$. Dadurch ist der Zahl u eine bestimmte Zahl $w = lw^2 + m\omega + \nu$ zugeordnet, wo ν auch die Werte $\pm\infty$ erhalten kann. Um aber auch ungeraden ganzzahligen Werten von u eine derartige Zahl für w zuzuordnen, hat man für m auch die Werte $\pm\infty$ zuzulassen, und da $2l + 1 = 2(l + 1) - 1$ ist, mufs man annehmen, dafs der Wert $l\omega^2 + \infty\,\omega$ mit dem Werte $(l + 1)\,\omega^2 - \infty\,\omega$ identisch ist. Hieraus ersieht man, dafs das Zeichen ω^2 für die neu eingeführte Zahl passend gewählt ist.

Auch die Zahlen $l\omega^2 + m\omega + \nu$ können geometrisch dargestellt werden. Wir gehen im euklidischen Raume von einer Schar paralleler Ebenen aus, die in gleichem Abstande einander folgen und entsprechend ihrer Folge durch die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen l bezeichnet werden sollen. In jeder Ebene l ziehe man wiederum eine Reihe paralleler Geraden und lege jeder eine Marke m bei. Alle Geraden, für die $m = 0$ ist, sollen in einer Ebene liegen, welche die sämtlichen Ebenen der Schar senkrecht durchschneidet. Auf jeder der gezogenen Parallelen nehme man unter Anwendung derselben Längeneinheit eine Messung vor und lasse die Nullpunkte wieder

einer Ebene angehören, die auf den Ebenen l senkrecht steht. Der Punkt $l\omega^2 + m\omega + \nu$ soll der Ebene l, in ihr der Geraden m angehören und soll von dem in dieser Linie gewählten Nullpunkt den Abstand ν haben, wobei das Zeichen von ν für die beiden Halbgeraden bestimmend ist. Damit aber alle diese Linien als Bestandteile eines einzigen Zuges betrachtet werden können, setzen wir fest, dafs nicht nur je zwei auf einander folgende Gerade derselben Ebene einen unendlich fernen Punkt gemeinschaftlich haben, sondern dafs auch die Gerade $+\infty$ der Ebene l mit der Gerade $-\infty$ der Ebene $l+1$ identisch sein soll, und dafs jede dieser Geraden zu einem Punkte zusammenschrumpft.

5. Um das Zahlgebiet nach der mitgeteilten Methode unbegrenzt zu erweitern, gehe man von den n Gleichungen aus:

$$(3)\quad u_1 = \operatorname{tg}\frac{u_0\pi}{2},\ u_2 = \operatorname{tg}\frac{u_1\pi}{2}\ \ldots\ u_n = \operatorname{tg}\frac{u_{n-1}\pi}{2}.$$

Will man vermittelst dieser Gleichungen die Werte $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ in eindeutiger Weise einander zuordnen, so führt man neue Zahlen $\omega, \omega^2 \ldots \omega^n$ ein und bildet aus ihnen entsprechend den früheren Festsetzungen die Zahlen

$$u_n = m_0\omega^n + m_1\omega^{n-1} + \ldots + m_{n-1}\,\omega + \nu,$$

wo $m_0, m_1, \ldots m_{n-1}$ ganze, ν beliebige Zahlen des gewöhnlichen Gebiets. sind.

Auch diese transfiniten Zahlen lassen sich geometrisch darstellen, wofern man die Fiktion eines mehrdimensionalen euklidischen Raumes benutzt und hierin eine Schar von parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen m_0, hierin eine Schar paralleler Ebenen m_1 von $n-2$ Dimensionen u. s. w. zieht, bis man dazu kommt, in jeder zweidimensionalen Ebene eine Schar paralleler Geraden zu konstruieren. Alle diese Gerade verbindet man in geeigneter Weise zu einem einzigen Linienzuge U_n und kann dann den Punkten dieses Zuges die Punkte einer Geraden U_0 eindeutig zuordnen.

6. Es ist für unsern Zweck nicht erforderlich, tiefer in die Theorie dieser Zahlen einzudringen; wir sehen somit davon ab, die Gesetze des Rechnens für diese Zahlen zu entwickeln, und bemerken nur, dafs sie ihrem Wesen nach ganz auf die Cantorschen transfiniten Zahlen hinauskommen. Uns interessiert hier die Frage: Ist es gestattet, nachdem wir in einer geraden Linie

den Nullpunkt und die Längeneinheit gewählt haben, einem im Endlichen gelegenen Punkte die Zahl ω zuzuordnen? Diese Frage mufs verneint werden; denn die Entwicklung hat uns gelehrt, dafs wir den Wert ∞ nicht entbehren können, welcher die gemeinschaftliche Grenze der Werte ν und $\omega - \nu$ für ein positives, unbeschränkt wachsendes ν ist. Da der Wert ∞ zwischen den Werten 0 und ω liegt, so mufs, falls der Wert ω durch einen im Endlichen gelegenen Punkt dargestellt wird, auch dem Werte ∞ ein Punkt des endlichen Gebietes entsprechen. Dafs dies nicht angeht, bedarf wohl keines Beweises.

§ 12.

Veroneses transfinite Zahlen.

1. Bei Herrn Veronese[9]) gehören die Untersuchungen über die Möglichkeit und die Art der Messung zu den allgemeinen Entwicklungen, welche den rein geometrischen Darlegungen vorausgehen. Demnach stützt er seine Theorie nicht auf geometrische Sätze, sondern gründet sie auf acht Hypothesen, von denen jede folgende mit den vorangehenden vereinbar, aber von ihnen unabhängig sein soll. An erster Stelle führt er seine »Grundform« ein als ein »eindimensionales, in der Lage seiner Teile identisches System, das zur Bestimmung aller anderen Formen dient«. (Hyp. I und II.) Indem er ein beliebiges Segment zur Einheit nimmt, nennt er das unbegrenzte System, das von dem gewählten Anfangs-Elemente aus in der einmal gewählten Richtung alle Vielfachen der Einheit enthält, das »Gebiet der Skala«. Eine »geordnete Gruppe« besteht aus zwei solchen Gebieten, die sich vom Anfangs-Element aus nach den beiden in der Grundform vorhandenen Richtungen hin erstrecken.

Hieran schliefst sich die dritte Hypothese an, die folgendermafsen lautet: »In einer Richtung der Grundform existiert wenigstens ein Element, welches in Bezug auf jedes begrenzte Segment als Einheit aufserhalb des Gebiets der Skala liegt.«

Um diese Hypothese als berechtigt zu erweisen, denke man sich zwei »geordnete Gruppen« N und N′ gegeben, die in ihren Eigenschaften übereinstimmen, von einander unabhängig sind und kein Element gemeinschaftlich haben. Diese Gruppen werden in

der Folge NN' betrachtet, so dafs jedes Element von N' auf alle Elemente von N folgt. Da diese Gruppen der Grundform angehören, kann man, falls A ein Element von N, A' ein Element von N' ist, auch vom Segmente AA' beliebige Vielfache bilden. Hiernach liegt nicht nur jedes Element A' von N', sondern auch jedes Element A'', welches durch die Forderung AA' = A'A'' gefunden wird, aufserhalb des Gebietes der ersten Skala.

2. Soweit ist dies System (bis auf die Form) in voller Übereinstimmung mit dem System, welches wir im vorangehenden Paragraphen entwickelt haben. Auch dort bildet die Gesamtheit der Elemente, welche bei festem m und beliebigem n durch die Form $m\omega \pm n$ dargestellt werden können, eine geordnete Gruppe im Veroneseschen Sinne. Aber während dort jedesmal zwei derartige Gruppen unmittelbar auf einander folgen, setzt Veronese fest, dafs zwischen irgend zwei geordneten Gruppen jedesmal unendlich viele Gruppen derselben Art liegen. Diese Forderung drückt er in seiner vierten Hypothese folgendermafsen aus:

»Wenn man in dem in Bezug auf eine beliebige Einheit (AA_1) im Unendlichgrofsen liegenden Gebiet 1. ein beliebiges Element B^∞ auswählt, so existiert in dem Segment (AB^∞) ein solches Element X, dafs (AX) und (XB^∞) ebenfalls in Bezug auf (AA_1) unendlich grofs sind, und 2. ein solches Element A^∞, dafs das Segment (AX) für jedes beliebige X in Bezug auf (AA^∞) endlich ist.«

Dadurch gelangt man zu dem Unendlichgrofsen erster Ordnung. Indem man ein darin enthaltenes Element mit dem Zeichen ∞_1 bezeichnet, erhält man durch wiederholte Addition und Subtraktion der ursprünglichen Einheit

$$\ldots \infty_1 - n \ldots \infty_1 - 2,\ \infty_1 - 1,\ \infty_1,\ \infty_1 + 1,\ \infty_1 + 2 \ldots \infty_1 + n, \ldots$$

Wenn man dagegen das Segment (AA^{∞_1}), wo das Element A^{∞_1} dem Zeichen ∞_1 entspricht, zur Einheit nimmt, so wird man auf die Elemente $\infty_1 . n_1$ und damit auch auf die Elemente $\infty_1 . n_1 \pm n_2$ geführt. Auch bietet es jetzt keine Schwierigkeit, mit Hilfe der Zahl ∞_1 Zahlen von der Form

$$(1)\quad \infty_1{}^m . n \pm \infty_1{}^{m-1} . n_1 \pm \ldots \pm \infty_1 . n_{m-1} \pm n_m$$

zu bilden.

Indessen ist damit das Gebiet der möglichen Zahlen noch nicht erschöpft. Da die Zahlen (1) sich ihrem Wesen nach nicht

von den gewöhnlichen Zahlen unterscheiden sollen, so hält sich Veronese (Hyp. V) für berechtigt, die in der Hyp. IV angegebene Operation so oft auszuführen, als die Zahl (1) angiebt. Dadurch werden Zahlen ähnlicher Art gebildet, mit deren Hilfe man zu stets neuen Zahlen

$$(2) \quad \infty_1^{\infty_1^{m}}, \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^{m}}} \quad \ldots$$

gelangt.

3. Hieran schliefst sich die sechste Hypothese:

»Jedes endliche Segment, dessen Enden stets in entgegengesetzten Richtungen variieren und welches unbegrenzt klein wird, enthält ein Element aufserhalb des Feldes der Veränderlichkeit seiner Endelemente.«

Ist AB ein derartiges Segment, so dürfen wir wohl annehmen, es werde verlangt, dafs der Punkt X sich von A aus in der Richtung AB, der Punkt X′ von B aus in der Richtung BA bewege, dafs hierbei das Segment XX′ stets endlich bleibe in Bezug auf AB, dafs jedoch die Mafszahl des veränderlichen Segmentes für das feste als Einheit immer kleiner werde; dann soll zwischen den Punkten X und X′ stets mindestens ein Element des gegebenen Segmentes liegen. Von einem System, welches dieser Hypothese genügt, wird gesagt, es sei in Bezug auf die gegebene Einheit stetig, oder auch kurz, es sei relativ stetig. Es wird gezeigt, dafs dieser Forderung nicht nur ein einzelnes Element genügt, sondern dafs es jedesmal ein unendlich kleines Gebiet giebt, dessen Elemente aufserhalb des Variabilitätsgebietes der Endelemente liegen.

Zwischen den endlichen und den unendlich grofsen Segmenten besteht kein wesentlicher Unterschied; vielmehr kann jede Operation, die sich mit einem endlichen Segment ausführen läfst, auch mit jedem unendlich grofsen Segment vorgenommen werden. Wenn aber ein Segment AA′ für die Einheit AB der Zahl ∞_1 entspricht, so wird umgekehrt, falls man AA′ zur Einheit wählt, das Segment AB unendlich klein. Hiernach liegt es nahe vorauszusetzen (Hyp. VII), dafs jedes zur Einheit gewählte Segment unendlich kleine Segmente einer jeden beliebigen Ordnung enthält.

Mit diesen Annahmen sollen aber die Eigenschaften der Grundform noch nicht abgeschlossen sein; vielmehr verlangt die letzte (VIIIte) Hypothese noch:

»Wenn die Enden eines Segmentes sich in entgegengesetztem Sinne so verändern, dafs es im absoluten Sinne unbegrenzt klein wird, so enthält es ein Element aufserhalb des Gebietes, in welchem seine Enden sich verändern können.«

Zwischen der sechsten und der achten Hypothese besteht ein wesentlicher Unterschied: denn bei der Veränderlichkeit, wo das Segment in Bezug auf die gewählte Einheit unbegrenzt klein wird, (wie die sechste Hypothese voraussetzt,) genügen alle Elemente eines gewissen Segments der Forderung; aber wenn das Segment, wie sich Veronese ausdrückt, im absoluten Sinne unbegrenzt klein wird, so giebt es nur ein einziges Element aufserhalb des Gebiets der Veränderlichkeit.

4. Mit den Veroneseschen Zahlen nahe verwandt ist das von Hrn. Levi-Cività aufgestellte System; es wird deshalb notwendig sein, ihm einige Worte zu widmen. Hierbei glaube ich dem Leser das Verständnis zu erleichtern, wenn ich von einer geometrischen Darstellung ausgehe, die zwar in der Arbeit selbst nicht erwähnt wird, die aber sehr nahe liegt.

Man bestimme die Lage eines Punktes auf einem geraden Kegel 1. durch den Abstand a des Punktes vom Scheitel, indem man diese Gröfse auf dem einen Mantel positiv, auf dem andern negativ sein läfst, und 2. durch die Zahl $\nu = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, wo die durch den Punkt und die Achse gelegte Ebene mit einer festen Ebene den Winkel φ bildet. Hängt man jetzt die Gröfse ν an a als Marke an, so genügt das Zeichen a_ν, um die Lage des Punktes eindeutig anzugeben. Da alle Punkte o_ν im Scheitel zusammenfallen, so sollen auch alle Zeichen o_ν denselben Wert darstellen. Sollen die Punkte $a_{-\infty}$ und $a_{+\infty}$ verschieden sein, so führe man durch die Oberfläche des Kegels einen Schnitt längs einer Erzeugenden. Indem man jetzt noch festsetzt, dafs $a_\mu > a_\nu$ ist für $\mu > \nu$ und $a_\mu > b_\nu$ für $a > b$, hat man alle Punkte in eine feste Reihe gebracht.

Das Gebiet dieser Zahlen kann aber noch in folgender Weise

erweitert werden. Man lasse der Gruppe $G = a^{(1)}_{\nu_1} + a^{(2)}_{\nu_2} + \ldots$, die eine endliche oder unendliche Anzahl von Elementen enthält, alle Punkte $a^{(1)}_{\nu_1}$, $a^{(2)}_{\nu_2}$... angehören. Weil man zwei Zahlen a_ν und b_ν leicht durch Summation zu einer einzigen Zahl vereinigen kann, so werden alle Indices ν_1, ν_2 ... als verschieden vorausgesetzt Die Gesamtheit der in einer Gruppe vereinigten Punkte betrachtet man wieder als eine einzige Zahl, wenn entweder die Anzahl der Marken ν_1, ν_2 ..., die gröfser sind als eine beliebig gewählte Zahl, endlich ist, oder wenn in der Gruppe nur eine endliche Anzahl von Marken vorkommt, die kleiner sind als jede beliebig gewählte Zahl. Im ersten Falle wird die Zahl eine elliptische, im zweiten eine hyperbolische genannt. Alle elliptischen Zahlen (und ebenso die hyperbolischen für sich) können wieder so geordnet werden, dafs ihre Gesamtheit eine einzige Reihe bildet.

Levi-Cività zeigt nun, dafs man auf die neuen Arten von Zahlen die Addition, Subtraktion und Multiplikation anwenden darf, ohne dafs die für die reellen endlichen Zahlen geltenden Gesetze eine Änderung erleiden. So kann man mehrere Punktmengen, die elliptischen Zahlen entsprechen, durch Operationen, welche ganz den Charakter der ganzen rationalen Funktionen haben, zu einer neuen Punktmenge vereinigen, welche wieder durch eine elliptische Zahl dargestellt wird. Dasselbe gilt für transcendente Funktionen, welche überall im Endlichen den Charakter ganzer Funktionen besitzen.

5. Ehe die Veroneseschen Zahlen als berechtigt anerkannt werden können, bedürfen sie jedenfalls einer wirklichen Begründung, welche bisher unseres Erachtens noch durchaus fehlt. Im Gegenteil unterliegt ihre Theorie bisher sehr schweren Bedenken, von denen wir im folgenden wenigstens einige anführen möchten.

Dem von Veronese ausgesprochenen Gedanken, dafs die Cantorschen Zahlen sich vom Standpunkt der Arithmetik, seine eigenen vom geometrischen Standpunkte aus unmittelbar ergeben (si presentano spontaneamente), vermag ich nicht zuzustimmen. Vielmehr hat uns der vorangehende Paragraph gelehrt, dafs auch die Geometrie zunächst und in voller Strenge auf die Cantorschen

Zahlen führt. Überhaupt mufs eine genügend begründete Theorie des Transfiniten auf beiden Wegen gewonnen werden können. Dafs dies für die Cantorsche Theorie gilt, haben die beiden vorangehenden Paragraphen gezeigt. So lange man nicht von der Gesamtheit der natürlichen (ganzen positiven) Zahlen aus zu der Veroneseschen Theorie gelangt, fehlt ihr eine wesentliche Stütze.

Jedenfalls dürfen aber die beiden Theorieen nicht zu entgegengesetzten Folgerungen führen. So versichert Cantor, dafs die aktual unendlich kleinen Gröfsen an einem innern Widerspruch leiden; Veronese dagegen hält sie für vollauf berechtigt. Wie bereits bemerkt, hat Cantor den Beweis für seine Behauptung noch nicht veröffentlicht; Veronese glaubt, dafs dabei das Aktual-Unendlichkleine durch ein Postulat ausgeschlossen sei. Ohne auf diese Frage einzugehen, müssen wir doch zugestehen, dafs sich jede beliebige Mächtigkeit durch die Cantorschen Zahlen darstellen läfst; somit müfste es auch möglich sein, die Veronesesche Zahl ∞_1 durch die Cantorschen Zahlen auszudrücken, was Veronese selbst als ausgeschlossen betrachtet.

6. Der charakteristische Unterschied der Cantorschen und der Veroneseschen Zahlen ist darin zu erblicken, dafs im einen Falle auf jede »geordnete Gruppe« eine zweite unmittelbar folgt und eine andere ihr unmittelbar vorangeht, während im Veroneseschen System zwischen irgend zwei derartigen Gruppen unendlich viele Gruppen derselben Art liegen. Dafs die erste Annahme zulässig ist, kann streng begründet werden (§ 11); Veronese glaubt seine Theorie genügend zu erweisen, wenn er zeigt, dafs seine Zahlen sich in eine Reihe bringen lassen, die folgenden Bedingungen genügt:

a) von zwei ungleichen Zahlen ist stets eine die gröfsere (mit anderen Worten: eine folgt auf die andere);

b) wenn von den drei Zahlen a, b, c die Zahl b auf a und c auf b folgt, so folgt auch c auf a.

Aber diese Eigenschaft genügt nicht, um nachzuweisen, dafs die dargestellten Segmente einem eindimensionalen Gebilde angehören; denn sie kommt auch Gebilden von beliebig vielen Dimensionen zu. Ist z. B. in einem n-dimensionalen Raume jedem Punkte ein einziges Wertsystem ($x_1 \ldots x_n$) zugeordnet und entspricht umgekehrt jedem Wertsystem ein einziger Punkt,

so setze man fest, dafs für $y_n > x_n$ jeder Punkt $(y_1 \ldots y_n)$ auf den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ folgen soll; für $y_n = x_n$ soll der Punkt $(y_1 \ldots y_{n-1}, y_n)$ eine spätere Rangordnung erhalten, als $(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n)$, wenn $y_{n-1} > x_{n-1}$ ist. In gleicher Weise fahre man fort, bis man zu Punkten gelangt, für welche die Koordinaten $x_2 = y_2 \ldots x_n = y_n$ gleich sind, und nur die Koordinate x_1 ungleiche Werte besitzt, und die man nach der Gröfse von x_1 ordnet. Eine derartige Zuordnung, die, wie wir beiläufig bemerken, in den Arbeiten des Hrn. Cantor eine wichtige Rolle spielt, ist somit keineswegs für die eindimensionalen Gebilde charakteristisch.

Daran ändert sich auch nichts, wenn für die neuen Zahlen, wie Levi-Cività für seine Zahlzeichen nachweist, teilweise wenigstens die Gesetze der gebräuchlichen Arithmetik gelten. Denn die gewöhnlichen komplexen Zahlen lassen sich erstens in eine Reihe von der oben bezeichneten Art bringen, und zweitens befolgen sie vollständig dieselben Rechnungsregeln wie die gewöhnlichen Zahlen; dennoch hat bisher niemand daraus schliefsen wollen, dafs sie eine eindimensionale stetige Mannigfaltigkeit bilden.

7. In der Veroneseschen Theorie wird der Streifen A, der von zwei Parallelen in einer euklidischen Ebene eingeschlossen ist, so auf eine Gerade g abgebildet, dafs

a) jedem Punkte des einen Gebildes ein einziger Punkt des andern entspricht; dafs

b) jedesmal für alle Punkte des Streifens, die auf einer zu den Grenzen parallelen Geraden a liegen, die Bildpunkte einer einzigen Strecke a′ angehören, und dafs,

c) wenn a, b, c irgend drei solche Gerade des Streifens sind und b zwischen a und c liegt, auch die Bildstrecke b′ zwischen den Strecken a′ und c′ liegt, welche den Geraden a und c entsprechen.

Hierbei verschlägt es nichts, dafs der Streifen A und die Gerade g unendlich sind; denn der Streifen kann leicht auf ein Rechteck, die Gerade auf eine endliche Strecke eindeutig und stetig bezogen werden. Nun ist bekannt, dafs man ein Rechteck eindeutig auf eine Strecke abbilden kann, wofern man von der Stetigkeit absieht (vgl. B. 1. S. 168, 169). Umgekehrt ist erwiesen, dafs eine stetige eindeutige Abbildung nur bei gleicher

Zahl von Dimensionen möglich ist. Dabei wird aber verlangt, dafs sämtlichen Punkten, die im Bereiche irgend eines Punktes des Rechtecks liegen, solche Punkte zugeordnet sind, die eine einzige Strecke anfüllen.

Die hier verlangte Abbildung nimmt eine Mittelstellung ein; sie erfolgt einmal nicht so sprungweise wie die zuerst erwähnte Abbildung, und verlangt andererseits nicht, dafs alle einem zusammenhangenden Flächenteile angehörenden Punkte auf eine einzige Strecke abgebildet werden. Wenn nun auch bisher die Unmöglichkeit einer derartigen Abbildung nicht erwiesen ist, so genügt das keineswegs. Solange nicht gezeigt worden ist, dafs eine stetige Folge von geraden Linien zu einem einzigen eindimensionalen Gebilde vereinigt werden kann, fehlt die Grundlage für die vierte Veronesesche Hypothese und damit auch für alle folgenden. Man darf also nicht, wie Veronese will, seine Zahlen zur Begründung der angegebenen Abbildung heranziehen, da vorher diese Zahlen als berechtigt erwiesen sein müssen und dieser Nachweis nur vermittelst des bezeichneten Satzes geführt werden kann.

8. Veronese glaubt die Stetigkeit durch seine sechste und achte Hypothese begründen zu können. Ich will die Bedenken, welche ich gegen diese beiden Hypothesen hege, nicht darlegen, auch meine Ansicht nicht näher begründen, dafs sie keineswegs genügen, um das Gebilde zu einem stetigen zu machen. Ich begnüge mich mit folgender Bemerkung: Soll die Grundform eine stetige eindimensionale Mannigfaltigkeit bilden, so müssen die in ihr enthaltenen Gruppen zu einem Ganzen vereinigt sein. Jede Gruppe verläuft unbegrenzt, ohne einen festen Anfangs- und Endpunkt zu besitzen; sie soll mit keiner andern Gruppe einen Punkt gemeinsam haben; dennoch sollen die einzelnen Teile des Ganzen im Zusammenhang stehen. Wie das möglich sein soll, ist für mich unfafsbar. Betrachten wir z. B. die Bewegung (Veränderung) eines Punktes auf einer Geraden (in der Grundform). Der bewegte Punkt gehört stets einem einzigen Gebiete an, geht aber von einem Gebiete zum andern über. Letzteres ist nur möglich, wenn der Punkt beim Übergange entweder keinem derartigen Gebiete oder beiden zugleich angehört. Beide Möglichkeiten werden in dieser Theorie ausgeschlossen; somit sind die einzelnen Bestandteile nicht zu einer stetigen Mannigfaltigkeit vereinigt.

9. Um dies noch deutlicher einzusehen, bringen wir an der Darstellung, welche Veronese (S. 166 der italienischen, S. 184 der deutschen Ausgabe) von seinen Zahlen giebt, eine kleine Änderung an. (Dafs dabei die unendlich kleinen Segmente nicht vorkommen, ist belanglos.)

Wir gehen von einer horizontalen geraden Linie a aus und ordnen jeder beliebigen reellen, rationalen oder irrationalen Zahl einen einzigen auf ihr gelegenen Punkt in der bekannten Weise zu. Durch ihre rationalen Punkte lege man eine vertikale und durch jeden ihrer irrationalen Punkte eine horizontale Gerade, und zwar jedesmal so, dafs alle diese Geraden mit a rechte Winkel bilden. Jetzt betrachten wir die Gesamtheit der Punkte, die auf den so gezogenen Geraden liegen. In jeder vertikalen Geraden lasse man die höher gelegenen Punkte auf die niedriger liegenden folgen, und in jeder horizontalen Geraden soll von zwei Punkten derjenige als der spätere gelten, der rechts von dem andern liegt. Wenn endlich zwei Punkte P und Q verschiedenen Geraden des Systems angehören, so soll Q später zu setzen sein als P, wenn dem Punkte, den die durch Q gelegte Gerade des Systems mit a gemein hat, eine gröfsere Zahl zugeordnet ist als dem Schnittpunkt von a mit der durch P gehenden Geraden. Hierdurch sind alle Punkte des Systems in eine feste Ordnung gebracht; zudem sind alle endlichen Segmente stetige Gebilde; aber dem Ganzen wird niemand Stetigkeit beilegen, weil ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Geraden nicht besteht und nicht herbeigeführt werden kann.

§ 13.

Rückblick.

Die Kongruenzsätze bilden, wie wir gesehen haben, wohl das wichtigste Hilfsmittel für Euklid, um seine Lehrsätze zu beweisen; auch sonstig gebrauchen die Alten die Bewegung recht häufig in der Geometrie, namentlich wenn es sich um die Ausführung von Konstruktionen handelt. Wenn ihnen wirklich, wie man vielleicht aus anderen Thatsachen schliefsen möchte, darum zu thun war, die Bewegung aus der Geometrie zu verbannen, so ist ihnen das keineswegs gelungen. In neuerer Zeit hat kein geringerer als Riemann den Versuch gemacht, die Geometrie

einzig auf die Mafsverhältnisse der Linien, also auf den blofsen Gröfsenbegriff, zu stützen; er hat damit allerdings eine sehr interessante analytische Theorie begründet, die auch für die Geometrie von hoher Bedeutung ist; aber es ist ihm keineswegs gelungen, hierdurch eine Grundlage für die Geometrie zu schaffen. Nehmen wir zu diesen Thatsachen die weitere hinzu, dafs sich die Messung der krummen Linien, der Flächen und Raumteile unter Anwendung der Kongruenzsätze auf die Messung der geraden Strecke zurückführen läfst, so dürfen wir wohl den Schlufs ziehen, dafs es gestattet ist, die Bewegung neben der im dritten Abschnitt als notwendig erkannten Teilung für den Aufbau der Geometrie zu benutzen, also Teilung und Bewegung zu den Grundbegriffen dieser Wissenschaft zu rechnen und mit ihrer Hilfe die weiteren Begriffe herzuleiten.

Wohl wendet man dagegen ein: Eine ganz andere Wissenschaft beschäftigt sich mit der Bewegung; es ist aber notwendig, jeder einzelnen Wissenschaft ihre eigene Sphäre zu belassen. Aber der Unterschied der Geometrie von der Mechanik ist schon dadurch vollständig charakterisiert, dafs die Bewegung in der letzteren Wissenschaft Selbstzweck, in der ersteren nur Hilfsmittel ist. Umgekehrt kann man fragen: Welches Recht hat die Mechanik, bei der Untersuchung der Bewegung die geometrischen Sätze zu benutzen, wenn die Bewegung der Geometrie ganz fremd ist?

Zuweilen wird auch die Behauptung aufgestellt: Die Geometrie hat es mit dem Raume, nicht mit den darin enthaltenen Körpern zu thun; der Raum kann nicht bewegt werden; folglich gehört auch die Bewegung der Geometrie nicht an. Darauf ist zu antworten: Wenn der Raum begrifflich einen Körper, der ihn deckt oder doch decken kann, nicht zu entbehren vermag, so mufs für die Untersuchung des Raumes der Körper naturgemäfs mit hinzugenommen werden. Wenn man auch zugeben kann, dafs es die Geometrie nur mit dem Raume zu thun hat, so mufs man doch zum mindesten einräumen, dafs die Geometrie die Aufgabe hat, verschiedene Raumteile und verschiedene Grenzgebilde mit einander zu vergleichen. Der unbewegliche Raum bietet kein Mittel, diese Vergleichung auszuführen; es mufs also ein Etwas vorhanden sein, durch welches die Vergleichung vermittelt wird. Dazu eignet sich am besten der Körper, welcher bewegt werden kann

und bei der Bewegung bald den einen und bald den anderen Raumteil deckt.

Hiernach brauchen wir kein Wort über den Einwand zu sagen, die Geometrie beschäftige sich mit dem leeren Raume oder denke sich wenigstens den Raum als leer. Gewifs fragt sie nicht im geringsten nach dem Stoffe, aus dem die Körper bestehen; auch sieht sie von den wirklich vorhandenen Körpern ab und läfst sich durch ihr Vorhandensein und die von ihnen thatsächlich ausgeführten Bewegungen in ihren Konstruktionen keineswegs stören; aber daraus folgt doch noch nicht, dafs der leere Raum das Objekt ihrer Untersuchung sei, oder dafs es ihr nicht gestattet sei, Körper im Raume zu denken und mit ihrer Hilfe die Eigenschaften des Raumes zu untersuchen.

In vielen Fällen wird die Kongruenz benutzt, um Gröfsenbeziehungen herzuleiten. Bei Euklid und in den neueren Lehrbüchern folgert man aus der Kongruenz zweier Dreiecke sehr oft die Gleichheit zweier Strecken; diese dient dazu, um vermittelst der Kongruenz anderer Dreiecke etwa die Gleichheit zweier Winkel herzuleiten u. dergl. Da könnte es scheinen, als ob die Kongruenz nur ein Mittel wäre, gewisse Gröfsenbeziehungen zu beweisen. Indessen geht die Geometrie weiter, indem sie bei Gebilden, die in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen, unterscheidet, ob sie mit einander zur Deckung oder nur gegen eine Ebene in symmetrische Lage gebracht werden können. Legendre nennt Raumgebilde gleich, (wofür die deutschen Mathematiker lieber kongruent sagen,) wenn sie sich zur Deckung bringen lassen; er unterscheidet davon aber die symmetrische Gleichheit, welche statthat, wenn entsprechende Strecken und Winkel jedesmal gleich sind, die homologen Grenzgebilde aber in entgegengesetzter Weise auf einander folgen. Eine derartige Unterscheidung wäre in der Geometrie nicht gestattet, wenn sie es nur mit Gröfsenbeziehungen zu thun hätte.

»Das Messen besteht«, wie Riemann sagt, »in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Gröfsen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Gröfse als Mafsstab für die andere fortzutragen. Fehlt dieses, so kann man zwei Gröfsen nur vergleichen, wenn die eine ein Teil der anderen ist, und auch dann nur das Mehr oder Minder, nicht das Wieviel ent-

scheiden.« Nun können die Raumteile selbst nicht bewegt werden; bei allen wirklichen Vergleichungen des Raumes gebraucht man den festen Körper; es ist also wohl am naturgemäfsesten, dasselbe Hilfsmittel auch für die Wissenschaft zuzulassen.*)

Die Bewegung, welche die Geometrie benutzt, ist aber nicht etwa die, welche ein luftförmiger oder flüssiger Körper ausführt, sondern nur die Bewegung eines festen Körpers liefert diejenige Vergleichung der Raumteile, welche hier gefordert wird. Somit sind wir jedenfalls berechtigt, die Bewegung fester Körper unter die Grundbegriffe der Geometrie aufzunehmen. Wir sind hierzu sogar so lange verpflichtet, bis eine andere Grundlage von gleicher Einfachheit und Natürlichkeit aufgestellt ist.

Aber eine andere Frage ist es, ob die Teilung und Bewegung für den Aufbau der Geometrie genügen. Wir haben oben gezeigt, dafs für gewisse Untersuchungen das Princip der Stetigkeit nicht entbehrt werden kann. Es würde also versucht werden müssen, dasselbe mit der Teilung und Bewegung in organischen Zusammenhang zu bringen. Wenn dies auch gelingt, so bleibt immer noch eine sehr schwierige Aufgabe zu erledigen, nämlich die Messung der Raumgebilde. Zwar lassen sich alle Messungen ausführen, sobald man die Mafszahlen für die geraden Strecken bestimmen kann, wie denn überhaupt die Meinung des Apollonius, dafs die Gröfsensätze auf Lagenbeziehungen zurückgeführt werden können, viel Wahres enthält. Auch darf man die Bedeutung der Gröfsensätze nicht nach der Anzahl der Stellen ermessen wollen, an denen sie bei Euklid gebraucht werden; dann würde man ihre Wichtigkeit weit überschätzen. Aber die Messung selbst gehört doch zweifellos der Geometrie an, und wenn auch im Grunde nur die der geraden Linie übrig bleibt, so bietet diese vorläufig noch unübersteigliche Schwierigkeiten.

Von den Alten wird stets ein Satz angewandt, der von Archimedes zuerst in voller Klarheit ausgesprochen ist und deshalb

*) Selbst die blofse Abschätzung, welche doch nur ungenaue Resultate liefert, beruht auf der Bewegung, welche das Auge ausführen mufs, um zwei Punkte nach einander zu fixieren. Die Fähigkeit, auf diese Weise etwas zu erreichen, wird aber erst durch Übung gewonnen, indem das Resultat der wirklich ausgeführten Messung mit der entsprechenden Bewegung des Auges oft genug verglichen wird.

nach dem Vorschlage von Stolz vielfach das Archimedische Princip genannt wird. Aber die Berechtigung dieses Princips ist fraglich geworden. So kann man, wie an einer anderen Stelle unseres Buches bewiesen wird, den euklidischen Raum so über das Unendlichferne ausgedehnt denken, dafs ein idealer Teil hinzutritt, der mit dem reellen Teile in allen Eigenschaften übereinstimmt und durch das Unendlichferne mit ihm zusammenhängt. Dann besteht jede gerade Linie aus zwei Teilen, welche durch zwei unendlich ferne Punkte mit einander verbunden sind. Vergleicht man ein unendlich grofses Segment dieser geraden Linie, d. h. einen Teil, von dem der eine Endpunkt dem reellen, der andere dem idealen Bereiche angehört, mit einem endlichen Segment, dessen beide Endpunkte im reellen Bereiche liegen, so wird jedes Vielfache des zweiten Segmentes kleiner sein als das erste. Überhaupt zeigt die Theorie der transfiniten Zahlen, dafs das Archimedische Axiom in der Form, in der es zunächst ausgesprochen wird, keine notwendige Eigenschaft der Zahlgröfsen darstellt. Aber das ist von geringerer Bedeutung; für die Geometrie handelt es sich vor allem darum, ob die Folgerungen, welche für die Messung aus dem Axiom gezogen werden, berechtigt sind oder nicht. Dies kommt darauf hinaus, ob das Gebiet der natürlichen Zahlen nur auf die Weise ins Transfinite erweitert werden kann, die wir G. Cantor verdanken, oder ob die Veroneseschen Zahlen ebenfalls berechtigt sind.

Der Unterschied der beiden Systeme läfst sich am leichtesten in folgender Weise angeben. Wir denken uns allen positiven und negativen ganzen Zahlen der Reihe nach Punkte eines eindimensionalen Gebildes zugeordnet und setzen voraus, dafs dadurch das Gebilde nicht erschöpft ist, so dafs es noch Punkte giebt, die weder zu den angegebenen gehören noch zwischen je zweien unter ihnen liegen. Dann läfst sich in einem anderen Teile des Gebildes eine ähnliche Zuordnung ausführen. Dadurch werden auf dem Gebilde gewisse Bereiche erhalten, von denen jeder eine unendliche Reihe von Punkten enthält, die der Gesamtheit der positiven und negativen ganzen Zahlen entsprechen. Nun ist es, wie wir bewiesen haben, gestattet anzunehmen, dafs jeder derartige Bereich auf einen gleichen Bereich unmittelbar folgt und einem andern unmittelbar vorangeht, wobei wir voraussetzen

müssen, dafs je zwei zusammenstofsende Bereiche in einem gemeinsamen Endpunkte zusammenhangen. Die auf diese Weise begründeten Zahlen sind mit den Cantorschen identisch. Es fragt sich aber, ob es auch gestattet ist, vorauszusetzen, dafs zwischen je zwei solche Bereiche jedesmal unendlich viele Bereiche derselben Art eingeschoben werden können, so dafs es kein unmittelbar folgendes und kein unmittelbar vorangehendes giebt. Diese Voraussetzung liegt den Veroneseschen Zahlen zu Grunde. So grofse Bedenken sich auch dieser Theorie entgegenstellen, konnte doch ihre Unzulänglichkeit nicht derartig bewiesen werden, dafs ein abschliefsendes Urteil möglich ist. Wir sehen also: Um über die Messung der geraden Strecke ins reine zu kommen, sind weitgehende Untersuchungen anzustellen, indem sogar die Theorie der transfiniten Zahlen herangezogen werden mufs; alles, was in dieser Hinsicht bisher geleistet ist, genügt noch nicht, um volle Klarheit zu schaffen; nachdem aber die Frage einmal bis zu dem jetzt erreichten Punkte gefördert ist, kann die endgültige Entscheidung nicht mehr lange auf sich warten lassen.

Zum Schlufs dürfen wir wohl auf die Schwierigkeiten hinweisen, welche schon die Beantwortung der Frage bietet, welche Stelle den auf die Messung bezüglichen Untersuchungen im System anzuweisen ist. Setzt man sie in den Anfang, ehe man etwa die gerade Linie eingeführt hat, so bekommt die ganze Darlegung den Charakter des Willkürlichen; verschiebt man sie an eine spätere Stelle, so beraubt man sich aller Vorteile, welche die analytische Behandlung ihrer Natur nach bietet.

Sechster Abschnitt.

Abschlufs der projektiven Geometrie.

§ 1.

Die Staudt-Kleinschen Voraussetzungen.

Wir haben uns zwar schon im zweiten Abschnitt (B. 1. S. 97—166) mit der projektiven Geometrie beschäftigt; aber bei dem Charakter, den wir dem ersten Bande glaubten erhalten zu müssen, konnte manche Frage, welche diesen Zweig der Geometrie betrifft und für die Grundlagen von Bedeutung ist, dort nicht zum Abschlufs gebracht werden. Deshalb scheint es geboten, hier nochmals auf die projektive Geometrie zurückzukommen.[10])

1. An erster Stelle wollen wir untersuchen, ob es angebracht ist, von vornherein den Raum als Ganzes der Betrachtung zu Grunde zu legen, oder ob man besser daran thut, sich anfangs nur auf einen endlichen Teil des Raumes zu beschränken. Viele ziehen den ersten Weg vor; sie nehmen dann an, dafs zwei beliebige Ebenen eine Gerade gemeinschaftlich haben, und dafs zwei Gerade derselben Ebene sich jedesmal in einem Punkte schneiden. Von anderer Seite aber betrachtet man anfangs einen fest gewählten Bereich und setzt voraus, dafs hierin zwei Ebenen höchstens eine Gerade, eine Gerade und eine Ebene höchstens einen Punkt gemeinschaftlich haben, wofern die Gerade nicht in die Ebene hineinfällt. Wir wollen die beiden Methoden mit einander vergleichen.

Zunächst behaupte ich, dafs eine Raumform alle projektiven Eigenschaften auch dann besitzen kann, wenn die Gerade mit jeder sie nicht enthaltenden Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich

hat. Um das einzusehen, lege man der Untersuchung die früher (II § 6, B. 1. S. 124—127) eingeführten Koordinaten x, y, z zu Grunde und bestimme vier Gröſsen x_0, x_1, x_2, x_3 durch die Forderungen:

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{x_3}{x_0},\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Nimmt man jetzt an, den Wertsystemen (x_0, x_1, x_2, x_3) und $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ entspreche regelmäſsig derselbe Punkt, so gelten folgende Gesetze: Durch zwei Punkte geht jedesmal eine Gerade; durch eine Gerade und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt läſst sich stets eine, und zwar eine einzige Ebene legen; zwei beliebige Ebenen schneiden sich in einer Geraden, drei nicht durch eine Gerade hindurchgehende Ebenen schneiden sich in einem Punkte. Aber man kann mit gleichem Rechte annehmen, daſs die beiden Wertsysteme (x_0, x_1, x_2, x_3) und $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ verschiedene Punkte (Gegenpunkte) darstellen. Dann wird jede Gerade (und somit auch jede Ebene), die durch einen Punkt hindurchgeht, auch seinen Gegenpunkt enthalten, da die Gleichung $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ stets befriedigt wird, wenn man allen Koordinaten die entgegengesetzten Werte beilegt. Hiernach haben zwei Ebenen regelmäſsig eine einzige gerade Linie gemeinschaftlich, aber die Ebene wird von jeder Geraden, die nicht in ihr liegt, in zwei Punkten geschnitten; ebenso haben zwei in derselben Ebene liegende Gerade stets einen Punkt und seinen Gegenpunkt gemeinschaftlich. Daſs die beiden hier angegebenen Raumformen sehr nahe mit einander verwandt sind, bedarf keiner Begründung; sie stimmen sogar in allen ihren Eigenschaften vollständig überein, wofern man nur gewisse einfach begrenzte Bereiche, etwa das Innere eines Tetraeders betrachtet. Aber auch im übrigen ist die Ähnlichkeit der beiden Raumformen so groſs, daſs man gezwungen ist, auch die zweite als eine projektive zu bezeichnen.

2. Aus den projektiven Raumformen will man durch Hinzunahme weiterer Voraussetzungen diejenigen Raumformen gewinnen, die mit der Erfahrung vereinbar sind. Sehen wir selbst ganz von den Clifford-Kleinschen Raumformen ab, bei denen man durchaus gezwungen ist, zunächst die Eigenschaften für ein endliches Gebiet zu entwickeln, so müssen wir gestehen, daſs in

voller Allgemeinheit nur die Kleinsche Raumform (die Polarform des Riemannschen Raumes) den Forderungen genügt, dafs zwei beliebige Ebenen eine Gerade und zwei in einer Ebene liegende Gerade einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben. Im Riemannschen Raume wird jede Ebene von einer nicht in ihr enthaltenen Geraden in zwei Punkten getroffen. In der Euklidischen und der Lobatschewskyschen Geometrie fehlen Gebilde, die in der allgemeinen Projektivität als existierend vorausgesetzt werden, und können höchstens als »uneigentliche« Gebilde künstlich eingeführt werden; für diese Raumformen gilt demnach der Satz, dafs zwei Ebenen eine Gerade gemeinschaftlich haben, nicht mehr in voller Allgemeinheit. Wollen wir also den mit der Erfahrung übereinstimmenden Raumformen Projektivität beilegen, so geht es nicht an, die Voraussetzung zu machen, dafs zwei beliebige Ebenen eine Gerade, zwei beliebige in einer Ebene liegende Gerade einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Dazu kommt noch, dafs es, wie die Betrachtung der Clifford-Kleinschen Raumformen zeigt, am natürlichsten ist, die Gesetze erst für ein endliches Gebiet zu entwickeln und dann zu diesem Gebiete neue Gebiete, welche dieselben Eigenschaften besitzen, in unbegrenzter Folge hinzuzunehmen. Auch ist es eine durchaus naturgemäfse Aufgabe, zu erforschen, welche Möglichkeiten noch bestehen, wenn man die Voraussetzungen der Projektivität zunächst nur für ein endliches Gebiet macht; erst auf diesem Wege gelangt die Projektivität zu demselben Abschlufs, den wir im vierten Abschnitt der Metrik haben geben können.

3. Demnach sind wir gezwungen, von den beiden oben charakterisierten Methoden die zweite zu bevorzugen. Wir denken uns also einen einfach begrenzten Teil des Raumes gegeben; hierin setzen wir ein System von Flächen und Linien voraus, das folgenden Bedingungen genügt:

a) Die Schnittlinie von irgend zwei Flächen des Systems ist eine Linie des Systems und gehört jeder Fläche des Systems an, die zwei Punkte der Linie enthält.

b) Durch eine Linie des Systems und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt geht eine und zwar eine einzige Fläche des Systems.

Wir können diese Voraussetzungen auch wohl in folgender Form aussprechen:

Durch zwei Punkte des abgegrenzten Raumteiles geht jedesmal eine und zwar eine einzige Linie des Systems; durch drei Punkte, die nicht auf einer solchen Linie liegen, läfst sich jedesmal eine und zwar eine einzige Fläche des Systems legen.

Gleichwie wir bei diesen Definitionen bereits die Begriffe: Fläche, Linie und Punkt benutzt haben, müssen wir zu den aufgestellten Voraussetzungen das Princip der Stetigkeit hinzunehmen. Für die ersten Entwicklungen bedarf man indessen dies Princip nicht in seiner vollen Allgemeinheit; vielmehr genügt folgende Voraussetzung:

Jede in dem abgegrenzten Raume enthaltene Ebene zerlegt ihn in zwei Teile auf die Weise, dafs jede gerade Strecke, welche zwei in verschiedenen Teilen gelegene Punkte mit einander verbindet, die Ebene schneidet.

Daraus folgt für den angenommenen Raum unmittelbar der Satz:

Jede in einer Ebene enthaltene Gerade zerlegt sie so in zwei Teile, dafs jede gerade Strecke, welche einen Punkt des einen Teiles mit einem Punkte des andern verbindet, die gegebene Gerade in einem zwischen den beiden Punkten gelegenen Punkte trifft.

Unsere erste Aufgabe besteht jetzt darin, die einzelnen Annahmen eingehend zu prüfen, um uns über ihre Unabhängigkeit und ihre Tragweite Aufschlufs zu verschaffen.

4. Dafs es nicht möglich ist, die Projektivität durch Entwicklungen herzuleiten, die ganz auf ebene Gebiete beschränkt sind, hat bereits Klein aus analytischen Gesetzen gefolgert, die Beltrami für die kürzesten Linien auf krummen Flächen aufgestellt hat. Zu derselben Folgerung gelangt man auch durch eine einfache rein geometrische Betrachtung. In der That, wollten wir nur die Voraussetzung machen, dafs in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ein System von Linien gegeben sei, von denen durch je zwei Punkte nur eine einzige Linie hindurchgeht, so würde dadurch keine Beziehung zwischen den Linien des Systems bestimmt. Man lasse vom Punkte 1 aus beliebige Linien ausgehen, welche keinen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben.

Nachdem solche in beliebiger Anzahl gewählt sind und für eine weitere Linie ein zweiter Punkt bestimmt ist, bleibt für diese Linie noch immer ein gewisses Winkelfeld. Denkt man sich alle vom Punkte 1 ausgehenden Linien bestimmt, so sind die von einem zweiten Punkte 2 ausgehenden Linien bis auf die Linie (21) willkürlich und haben nur den beiden Bedingungen zu genügen, dafs sie unter einander keinen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben und dafs keine den von 1 ausgehenden Linien zweimal begegnet. Diese Willkür ändert sich bei Hinzunahme eines $(n+1)^{ten}$ Punktes nicht, nachdem für irgend eine endliche Zahl n von Punkten Gesetze angegeben sind, nach denen sich sämtliche, durch je einen dieser Punkte hindurchgehende Linien des Systems bestimmen lassen. Die oben angegebenen Forderungen sind also von einander unabhängig und lassen sich nicht auf eine geringere Zahl von Voraussetzungen zurückführen.

5. Man denke aber nicht, dafs die beiden obigen Voraussetzungen nur für die Geraden und Ebenen des Raumes gelten. Schon Klein hat darauf hingewiesen, dafs durch irgend eine stetige Umgestaltung des Raumes die Geraden und Ebenen in Gebilde übergehen, für welche die angegebenen Eigenschaften wenigstens so lange bestehen bleiben, als man einen gewissen Bereich nicht verläfst. Wir möchten an einem einfachen Beispiele zeigen, dafs die vorausgesetzten Eigenschaften gewissen Systemen ganz allgemein zukommen.

Zu dem Ende betrachten wir wieder den Hyperbel-Sinus, den wir bereits im ersten Abschnitt benutzt haben. Indem wir setzen:

$$(1)\quad \mathrm{Sh}u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots$$

sehen wir, dafs zu jedem reellen Werte von u ein einziger reeller Wert von Shu gehört, und umgekehrt.

Jetzt sollen x, y, z Cartesische (recht- oder schiefwinklige) Koordinaten des euklidischen Raumes und α, β, γ drei von null verschiedene endliche konstante Gröfsen sein. Indem wir setzen:

$$(2)\quad \xi = \alpha\,\mathrm{Sh}\frac{x}{\alpha},\ \eta = \beta\,\mathrm{Sh}\frac{y}{\beta},\ \zeta = \gamma\,\mathrm{Sh}\frac{z}{\gamma},$$

entspricht jedem Punkte ein einziges System von Werten (ξ, η, ζ). Durch die Gleichung:

$$(3)\quad a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

wird bei konstanten Werten von a, b, c, d eine Fläche dargestellt, welche im allgemeinen von einer Ebene verschieden ist und nur dann in eine solche übergeht, wenn zwei der Koefficienten a, b, c gleich null sind. Zwei Flächen:

$$(4)\quad \begin{aligned} a\xi + b\eta + c\zeta + d &= 0 \\ a'\xi + b'\eta + c'\zeta + d' &= 0 \end{aligned}$$

haben entweder keinen (endlichen) Punkt oder eine einzige Linie gemeinschaftlich. Wenn aber die Wertsysteme (ξ', η', ζ') und (ξ'', η'', ζ'') den beiden Gleichungen (4) genügen, so werden diese beiden Gleichungen auch für:

$$\xi = \xi' + \lambda(\xi'' - \xi'),\quad \eta = \eta' + \lambda(\eta'' - \eta'),\quad \zeta = \zeta' + \lambda(\zeta'' - \zeta')$$

bei beliebigem Werte von λ befriedigt. Soll umgekehrt die Fläche

$$(5)\quad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

mit den beiden Flächen (4) die beiden Punkte (ξ', η', ζ') und (ξ'', η'', ζ'') gemeinschaftlich haben, so müssen die vier aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ A & B & C & D \end{matrix} \right\|$$

gebildeten Determinanten verschwinden, da im andern Falle diese vier Determinanten sowohl den Werten $\xi' : (-\eta') : \zeta' : (-1)$ wie den Werten $\xi'' : (-\eta'') : \zeta'' : (-1)$ proportional sein müfsten. Demnach ist

$$A = \lambda a + \mu a',\quad B = \lambda b + \mu b',\quad C = \lambda c + \mu c',\quad D = \lambda d + \mu d';$$

dann wird aber die Gleichung (5) für jedes Wertsystem erfüllt, welches den beiden Gleichungen (4) genügt, oder die letzte Fläche geht durch den Schnitt der beiden ersten hindurch. Nennen wir jede durch die Gleichung (3) dargestellte Fläche eine Fläche E und jede Schnittlinie zweier Flächen E eine Linie g, so geht durch irgend zwei Punkte des Raumes eine einzige Linie g und durch irgend drei Punkte, die nicht auf einer Linie g liegen, eine einzige Fläche E. Für das System dieser Linien und Flächen gilt also die projektive Geometrie.

Der angegebene Weg liefert uns bereits unendlich viele derartige Systeme; denn legen wir irgend ein anderes recht- oder schiefwinkliges Koordinatensystem zu Grunde oder ändern wir

die Koefficienten α, β, γ, so erhalten wir stets ein anderes System von Flächen E und Linien g.

6. Für die ersten Sätze der projektiven Geometrie genügt das Princip der Stetigkeit in der Form, die wir am Schlufs von 3. angegeben haben. Wahrscheinlich wird man es aber bei weitergehenden Untersuchungen in seinem ganzen Umfange heranziehen müssen.

Aufserdem ist noch Folgendes zu beachten. Um überhaupt die Theorie der Doppelverhältnisse nach der Methode zum Abschlufs zu bringen, die in II § 3 gelehrt ist, mufs man Gewifsheit darüber erlangen, ob die angegebene Konstruktion beim Übergang zur Grenze auch jedem irrationalen Werte des Doppelverhältnisses einen einzigen Punkt zuweist, oder ob dadurch für einen irrationalen Wert die Lage des Punktes nur auf eine gewisse Strecke eingeschränkt wird.

Die Untersuchungen, welche zur Entscheidung dieser Frage führen, unterscheiden sich nicht von denen, welche in der metrischen Geometrie darüber entscheiden, ob man durch Teilung einer Strecke in hinreichend viele gleiche Teile eine beliebig kleine Strecke enthält oder ob der n^{te} Teil einer Strecke für jede noch so grofse Zahl n oberhalb einer gewissen Strecke bleibt. Die entsprechenden Entwicklungen des vorigen Abschnitts müssen daher auch hier herangezogen werden. Wir brauchen sie hier aber nicht zu wiederholen, nehmen vielmehr in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der früheren Untersuchung im folgenden an, dafs jedem Doppelverhältnis auch dann ein einziger Punkt entspricht, wenn dasselbe einen irrationalen Wert hat.

7. Nachdem so die Voraussetzungen, von denen wir im zweiten Abschnitt ausgegangen sind, eine sorgfältige Prüfung erhalten haben, können wir die Entwicklungen des zweiten Abschnitts, namentlich die §§ 2—6 (B. 1. S. 99—128) folgen lassen, natürlich unter fortwährender Beschränkung auf den zu Grunde gelegten Raumteil. Ich möchte jedoch auf einen Abschnitt aus der projektiven Geometrie, der dort nur beiläufig erwähnt ist, besonders aufmerksam machen, da er im folgenden vielfach angewandt werden mufs.

Das wichtigste Hilfsmittel, durch welches die synthetische Geometrie zu ihren Lehrsätzen gelangt, ist die Zuordnung von

Punkten, Geraden und Ebenen zu einander. Da die projektive Geometrie sich darauf aufbaut, dafs zwei Ebenen sich in einer Geraden, zwei Gerade derselben Ebene in einem Punkte schneiden, so mufs diejenige Zuordnung der Punkte eines Raumteiles zu denen eines zweiten als besonders einfach angesehen werden, bei der auch jeder Geraden wieder eine Gerade, jeder Ebene eine Ebene derartig entspricht, dafs ungleichartigen Elementen des einen, die in einander liegen, Elemente des andern zugeordnet werden, die ebenfalls in einander liegen. Eine solche Zuordnung (Verwandtschaft) nennen wir kollinear; wir stellen daher mit Staudt folgende Definition auf:

Zwei Raumteile Σ und Σ_1 sind kollinear verwandt, wenn jedem Punkte π von Σ ein Punkt π_1 von Σ_1 entspricht, jeder durch π gehenden Geraden oder Ebene von Σ aber eine durch π_1 gehende Gerade resp. Ebene von Σ_1 zugeordnet ist.

Da die harmonischen Gebilde sich durch blofses Schneiden von Ebenen und Geraden ergeben und die Doppelverhältnisse sich auf harmonische zurückführen, so bezieht diese Zuordnung jedesmal einstufige Grundgebilde projektivisch auf einander, d. h. so, dafs die Doppelverhältnisse sich nicht ändern. Sind also α, β, γ, δ vier Punkte einer Geraden, so entsprechen ihnen vier Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1 einer zweiten Geraden derartig, dafs die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ einander gleich sind.

Will man zwei Raumteile kollinear auf einander beziehen, so darf man fünf beliebigen Punkten des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Punkte des andern als entsprechende zuweisen, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen.

Um diese Verwandtschaft analytisch darzustellen, setzt man, wenn dem Punkte x der Punkt y zugeordnet werden soll, zwischen den Koordinaten homogene lineare Gleichungen fest von der Form:

$$y_\alpha = \sum_\varkappa a_{\alpha\varkappa} x_\varkappa, \qquad (\text{für } \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

wo die aus den Koefficienten gebildete Determinante nicht verschwindet. Diese Gleichungen lassen unmittelbar erkennen, dafs die oben angegebenen Gesetze gelten. Zudem ergiebt sich, dafs die Gesamtheit dieser Umwandlungen von 15 Konstanten abhängt,

da die Gleichungen 16 Koefficienten enthalten und es nur auf ihre Verhältnisse ankommt.

In vielen Fällen ist es angebracht, auf die Ergebnisse von Transformationen die der Bewegung entsprechende Terminologie anzuwenden, namentlich in dem Falle, dafs man die Koefficienten von einer veränderlichen Gröfse t in der Weise abhängig macht, dafs für $t = 0$ jeder Koefficient $a_{\iota\iota}$ gleich eins und jeder Koefficient $a_{\iota\varkappa}$ für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ gleich null wird.

§ 2.

Die idealen Gebilde.

1. »Uneigentliche« oder »ideale« Gebilde sind selbst der elementaren Behandlung der Geometrie nicht ganz fremd. Will man auch nur die einfachsten Sätze über Projektivität für die euklidische Geometrie aussprechen, so ist es überaus lästig, stets zwischen schneidenden und parallelen Ebenen (bezw. Geraden) unterscheiden zu müssen. Um eine einheitliche Ausdrucksweise zu erhalten, macht man die Fiktion, zwei parallele Gerade hätten einen Punkt gemein. Aus einem leicht erkennbaren Grunde nennt man den nicht existierenden, »uneigentlichen« oder »idealen« Punkt, den eine Gerade mit einer zu ihr parallelen Linie gemein haben soll, den »unendlich fernen« Punkt der Geraden. Dann mufs man festsetzen, dafs alle unter einander parallelen Geraden denselben unendlich fernen Punkt besitzen. Ebenso legt man zwei parallelen Ebenen eine gemeinsame ideale Gerade, die »unendlich ferne« Gerade der Ebenen bei. Diese Gerade mufs die unendlich fernen Punkte aller in den beiden Ebenen liegenden Geraden enthalten und allen zu ihnen parallelen Ebenen gemeinsam sein. Weiterhin sieht man sich genötigt festzusetzen, dafs alle unendlich fernen Punkte des Raumes in einer Ebene, der »unendlich fernen Ebene«, liegen. Natürlich darf man diesen Gebilden keine reale Existenz beilegen, sondern mufs sie nur als ein Mittel betrachten, eine einheitliche Ausdrucksweise zu schaffen.

2. Eine weit gröfsere Bedeutung besitzen die idealen Gebilde für die allgemeine Projektivität.[11]) Um ihre Einführung vorzubereiten, betrachten wir den Strahlenbündel, d. h. die Gesamtheit der Geraden und Ebenen, die durch einen festen Punkt, den

Scheitel oder Mittelpunkt des Bündels, hindurchgehen. Für einen solchen Bündel gelten zahlreiche Gesetze, bei denen wir ganz vom Scheitel absehen können. Ja, es empfiehlt sich vielfach, sich beim Ausspruch der Sätze auf einen Raumteil zu beschränken, dem der Scheitel nicht angehört. Indem wir das thun, stellen wir folgende Sätze auf:

a) Durch jeden Punkt geht eine, und zwar eine einzige Gerade des Bündels.

b) Je zwei Strahlen des Bündels liegen in einer seiner Ebenen.

c) Wenn zwei Ebenen des Bündels (in dem abgegrenzten Raumteile) einen Punkt gemein haben, so schneiden sie sich in einer dem Bündel angehörenden Geraden.

d) Durch jede dem Bündel nicht angehörende Gerade geht eine, und zwar eine einzige Ebene des Bündels.

e) Wenn vier in einer Ebene liegende Strahlen oder vier durch einen Strahl gehende Ebenen des Bündels eine Gerade treffen, so ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte von der Wahl der getroffenen geraden Linie unabhängig.

f) Gehen von einem Punkte vier harmonische Gerade aus, von denen drei einen Strahl des Bündels schneiden, während die vierte dem Strahlbündel angehört, so liegt auch der von irgend einem andern Punkte ausgehende Strahl des Bündels harmonisch zu den drei Geraden, welche von dem neuen Punkte aus nach den drei Schnittpunkten mit dem festen Strahl gezogen werden.

Diese Sätze gelten, wie bereits erwähnt wurde, für einen Raumteil, in welchem der Mittelpunkt des Strahlenbündels nicht liegt. Wir können daher die in dem abgegrenzten Raumteil enthaltenen Geraden und Ebenen des Bündels als Ersatz für den nicht darin liegenden Mittelpunkt betrachten. Aber bei der Herleitung dieser Sätze gebraucht man den Mittelpunkt; es fragt sich also, ob derselbe für den Beweis entbehrt werden kann; wenn das möglich ist, darf man von einem idealen Punkte sprechen, der durch ein gewisses System von Geraden und Ebenen ersetzt wird. Die folgende Untersuchung wird uns lehren, dafs die aufgeworfene Frage bejaht werden mufs; sie wird uns aber in ihrem weiteren Verlauf auch zu idealen Geraden und Ebenen führen.

3. Unter einem ebenen Strahlenbüschel verstehen wir zuvörderst die Gesamtheit der in einer Ebene enthaltenen und durch

einen festen Punkt gehenden Strahlen. Wir wollen diesen Begriff in einfacher und natürlicher Weise erweitern.

Zu dem Ende betrachten wir vier Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie hindurchgehen. Diese vier Ebenen haben ein festes Doppelverhältnis, d. h. das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, in denen eine beliebige Gerade die vier Ebenen trifft, hängt nur von den Ebenen, aber nicht von der schneidenden Geraden ab. Beschränkt man sich auf solche Gerade, die einer festgewählten Ebene angehören, so kann man die Ebenen durch ihre Schnittlinien mit der festen Ebene ersetzen; diese vier Geraden haben die Eigenschaft, dafs ihre Schnittpunkte mit jeder Transversalen in einem konstanten Doppelverhältnis stehen; wir dürfen daher von dem Doppelverhältnis der vier Geraden sprechen. Diese Eigenschaft ist davon unabhängig, ob die Achse der vier ersten Ebenen die durchschneidende Ebene trifft oder nicht. Wenn ein Schnittpunkt (in dem abgegrenzten Raumteile) vorhanden ist, so gehen auch die vier Schnittlinien durch diesen Punkt; die Geraden gehören dann einem Büschel an. Wir werden daher auch in dem Falle, wo ein solcher Schnittpunkt nicht vorhanden ist, die vier Geraden als einem Büschel angehörig betrachten.

Umgekehrt gilt auch der Satz:

Wenn vier Geraden einer Ebene ein festes Doppelverhältnis haben, so lassen sich durch sie vier Ebenen hindurchlegen, welche eine gerade Linie gemein haben.

Die vier in einer Ebene liegenden Geraden a, b, c, d mögen die Eigenschaft haben, dafs das Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ihrer vier Schnittpunkte α, β, γ, δ mit einer beliebigen Geraden von der Wahl dieser Geraden unabhängig ist; jetzt behaupte ich: Liegt die der Ebene nicht angehörende Gerade q mit den Geraden a und b je in einer Ebene, so kann man auch durch q und c, sowie durch q und d je eine Ebene legen.

Zum Beweise betrachte ich die vier Ebenen $(q\alpha)$, $(q\beta)$, $(q\gamma)$, $(q\delta)$, deren Doppelverhältnis gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ist. Durch δ lege man eine neue Gerade, welche die drei anderen Geraden bezw. in den Punkten α', β', γ' treffen möge. Nach unserer Annahme ist das Doppelverhältnis $(\alpha'\beta'\gamma'\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta)$; es ist dies auch das Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche durch die Gerade q nach den vier Punkten α', β', γ', δ hin gelegt werden können.

Da die Ebenen $(q\alpha)$ und $(q\alpha')$, sowie die Ebenen $(q\beta)$ und $(q\beta')$ zusammenfallen, so müssen wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse die Ebenen $(q\gamma)$ und $(q\gamma')$ identisch sein, oder die Geraden q und c liegen in einer Ebene. Ebenso erkennt man unter Hinzunahme einer Linie, welche durch γ geht und die Geraden a, b, d schneidet, dafs die Ebene $(q\delta)$ die Gerade d enthält.

Hieran schliefst sich folgender Satz:

Wenn drei Geraden einer Ebene die Eigenschaft haben, dafs sich durch jede von ihnen und eine weitere Gerade, die der Ebene der drei ersten Geraden nicht angehört, eine Ebene legen läfst, so liegt die Schnittlinie irgend zweier Ebenen, die durch zwei von ihnen gelegt werden, mit der dritten Geraden in einer Ebene.

Der Annahme nach liegen die Geraden a, b, c in einer Ebene; eine vierte Gerade q, die dieser Ebene nicht angehört, liegt sowohl mit a, als mit b, als auch mit c je in einer Ebene. Durch einen beliebigen Punkt ϱ des Raumes und je eine der drei Geraden a, b, c lege ich eine Ebene und will beweisen, dafs diese drei Ebenen dieselbe Gerade gemein haben. Zu dem Ende wähle ich in der Ebene (ab) einen Punkt δ der Art, dafs sich von ihm aus zwei gerade Linien ziehen lassen, welche die Geraden a, b, c schneiden. Das geschehe in den Punkten α, β, γ und α', β', γ', wo die Punkte α und α' in a, β und β' in b, γ und γ' in c liegen. Durch die Schnittlinie r der Ebenen (ϱa) und (ϱb) lege ich drei weitere Ebenen, von denen eine durch γ, eine zweite durch γ, die dritte durch δ geht. Da die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\alpha'\beta'\gamma'\delta)$ dem Doppelverhältnis der vier durch q gelegten Ebenen gleich sind, so haben auch die vier Ebenen (ra), (rb), $(r\gamma)$, $(r\delta)$ dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Ebenen (ra), (rb), $(r\gamma')$, $(r\delta)$; die Ebenen $(r\gamma)$ und $(r\gamma')$ fallen also zusammen, oder die Geraden r und c liegen in einer Ebene.

Demnach stellen wir folgende Definition auf:

Drei Gerade einer Ebene gehören einem Strahlenbüschel an, wenn jede von ihnen mit derselben vierten, nicht in der Ebene enthaltenen Geraden in einer Ebene liegt.

Dann gelten folgende Sätze:

a) Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Gerade, die mit allen Geraden eines Strahlenbüschels in einer Ebene liegt.

b) Der Strahlenbüschel ist durch zwei beliebige seiner Strahlen bestimmt.

c) Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Strahl des Büschels; hat der Büschel keinen Mittelpunkt, so kann man durch jeden Punkt nur einen Strahl des Büschels legen.

d) Irgend vier Strahlen eines Büschels bestimmen auf allen hindurchgelegten Geraden gleiche Doppelverhältnisse.

4. Hiernach ist es nicht schwierig, ein Gebilde zu konstruieren, das vollständig der Gesamtheit der durch einen Punkt gelegten Geraden und Ebenen entspricht und das ebenfalls als Strahlenbündel bezeichnet werden soll. Wir gehen von zwei Geraden m und n aus, die in einer Ebene liegen, aber (wenigstens in dem abgegrenzten Raumteil) keinen Punkt gemein haben. Die vorige Nummer hat bereits gelehrt, wie wir von diesen Geraden aus zu einem Büschel von Strahlen gelangen; dieser Büschel soll dem durch die beiden Geraden bestimmten Bündel von Strahlen angehören. Um denjenigen Strahl zu finden, der durch einen nicht in der Ebene (mn) liegenden Punkt α geht, bestimmt man den Schnitt der Ebenen (αm) und (αn) und ordnet ihn dem Bündel zu. Hiernach geht durch jeden Punkt des Raumes ein Strahl des Bündels, und zwar ein einziger.

Wie wir bewiesen haben, liegt jeder der Ebene (mn) angehörende Strahl des Bündels mit jedem andern in einer Ebene. Hieraus folgt sofort, dafs jede Ebene, welche durch einen in der Ebene (mn) gelegenen Strahl des Bündels geht, einen Büschel von Strahlen enthält; somit enthält jede Ebene, deren Schnittlinie mit der Ebene (mn) dem Bündel angehört, alle diejenigen Strahlen des Bündels, die einen Punkt mit ihr gemein haben. Mit Hilfe dieses Satzes läfst sich leicht zeigen, dafs sich durch je zwei Strahlen des Bündels eine Ebene legen läfst.

Liegen nämlich die Strahlen a und b auf verschiedenen Seiten der Ebene (mn), so mufs die durch a und einen beliebigen Punkt von b gelegte Ebene die Ebene (mn) in einer Geraden p schneiden, die dem Bündel angehört. Da in dieser Ebene ein in der Ebene (mn) enthaltener Strahl des Bündels und ein Punk von b liegt, so mufs der Strahl b ganz in sie hineinfallen; diese Ebene enthält also die Geraden a und b.

Wenn aber die Strahlen a und b auf derselben Seite der

Ebene (mn) liegen, so bestimme man, was immer möglich ist, in der Ebene (mn) einen Strahl p des Bündels derartig, dafs p und b auf verschiedenen Seiten der Ebene (ma) liegen. Ist c die Schnittlinie der Ebenen (ma) und (bp), also selbst ein Strahl des Bündels, so haben die Strahlen b, c, p der Ebene (bp) die Eigenschaft, mit der Geraden m je in einer Ebene zu liegen. Da aber die Gerade a mit zweien unter ihnen, nämlich mit c und p, je in einer Ebene liegt, so mufs sie (nach 3.) auch einer durch die dritte Gerade b gelegten Ebene angehören.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze folgt, dafs in jeder Ebene, welche einen Strahl des Bündels enthält, noch unendlich viele seiner Strahlen liegen und dafs alle diese Strahlen einen Büschel bilden. Indem wir demnach jede solche Ebene dem Bündel angehören lassen, folgt unmittelbar, dafs jedesmal die Schnittlinie zweier Ebenen des Bündels einer seiner Strahlen ist, und dafs durch jede dem Bündel nicht angehörende Gerade eine einzige Ebene des Bündels geht.

Da je zwei Strahlen des Bündels in einer seiner Ebenen liegen, kann man den Strahlenbündel durch zwei beliebige seiner Strahlen oder auch durch einen seiner Strahlen und eine seiner Ebenen bestimmen. Auch sind bereits die vier ersten für den Bündel in 2. aufgestellten Sätze bewiesen; der Satz e) folgt daraus, dafs alle in einer Ebene enthaltenen Strahlen des Bündels einen Büschel bilden. Der Satz f) hat folgenden Inhalt: Wenn der durch einen Punkt α gehende Strahl a des Bündels harmonisch liegt zu den drei Geraden, welche den Punkt α mit drei Punkten π, ϱ, σ eines Strahles p verbinden, so liegt auch der von irgend einem andern Punkte β ausgehende Strahl b harmonisch zu den drei von β nach π, ϱ, σ gezogenen Geraden. Zum Beweise legen wir durch die Gerade $\alpha\beta$ vier Ebenen, von denen die erste durch a (und damit auch durch b), die zweite durch π, die dritte durch ϱ und die vierte durch σ geht. Diese vier Ebenen liegen harmonisch; sie werden also auch durch die Ebene (bp) in vier harmonischen Geraden geschnitten.

5. Zwei verschiedene Strahlenbündel können höchstens einen Strahl gemein haben, da durch zwei Strahlen ein einziger Bündel bestimmt ist. Dagegen geht durch jeden Punkt des Raumes, der nicht in dem etwa vorhandenen gemeinsamen Strahle liegt, eine

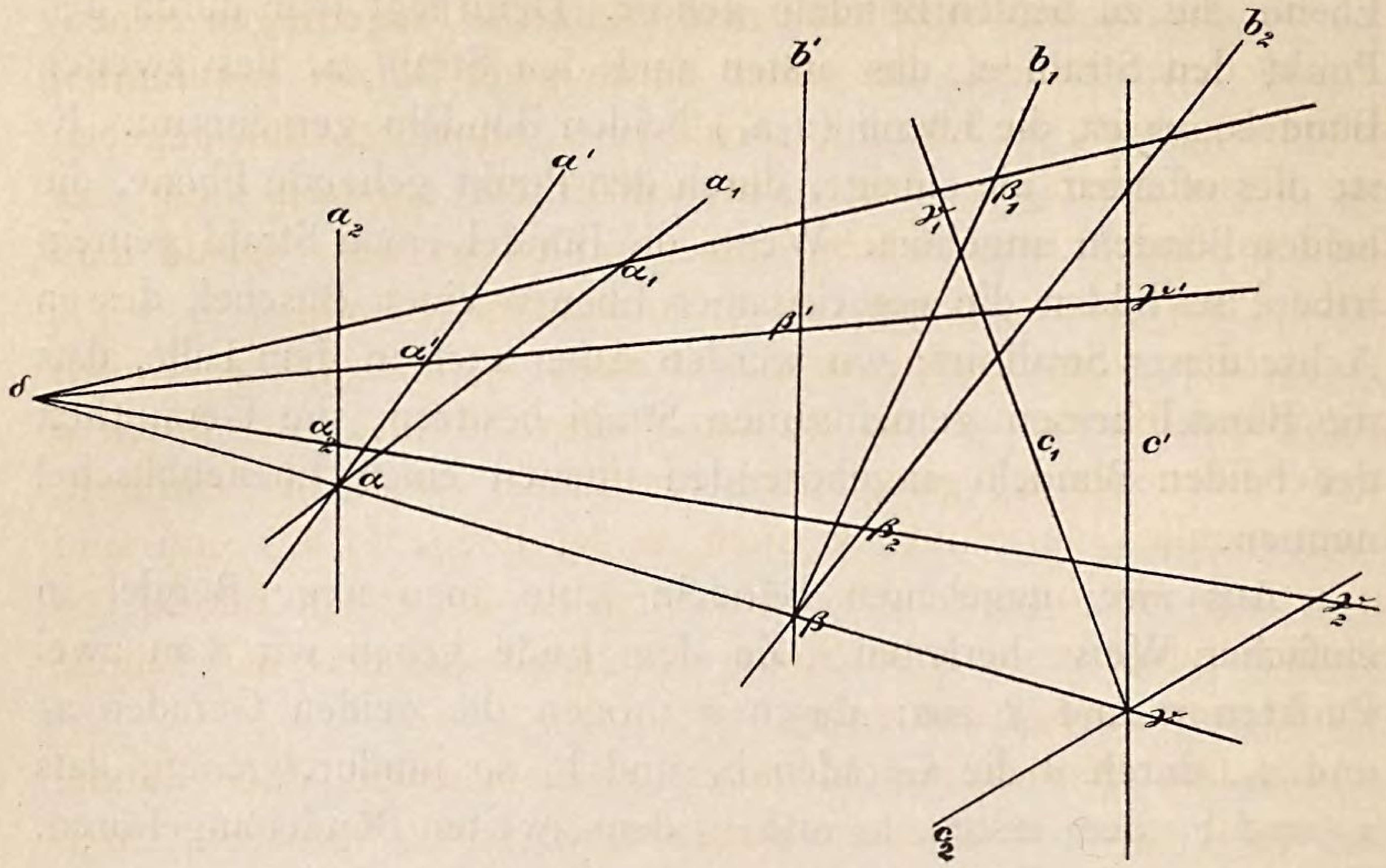
Ebene, die zu beiden Bündeln gehört. Denn legt man durch den Punkt den Strahl a_1 des ersten und den Strahl a_2 des zweiten Bündels, so ist die Ebene $(a_1 a_2)$ beiden Bündeln gemeinsam. Es ist dies offenbar die einzige, durch den Punkt gehende Ebene, die beiden Bündeln angehört. Wenn die Bündel einen Strahl gemein haben, so bilden die gemeinsamen Ebenen einen Büschel, dessen Achse dieser Strahl ist; wir werden daher auch in dem Falle, dafs die Bündel keinen gemeinsamen Strahl besitzen, die Gesamtheit der beiden Bündeln angehörenden Ebenen einen Ebenenbüschel nennen.

Aus zwei gegebenen Bündeln kann man neue Bündel in einfacher Weise herleiten. Zu dem Ende gehen wir von zwei Punkten α und β aus; durch α mögen die beiden Geraden a_1 und a_2, durch β die Geraden b_1 und b_2 so hindurchgehen, dafs a_1 und b_1 dem ersten, a_2 und b_2 dem zweiten Bündel angehören. Wenn jetzt der Punkt β nicht in der Ebene $(a_1 a_2)$ liegt, so möge irgend eine durch die Gerade $\alpha\beta$ gelegte Ebene die Ebene $(a_1 a_2)$ in einer Geraden a' und die Ebene $(b_1 b_2)$ in einer Geraden b' schneiden. Von dem Bündel, der die Geraden a' und b' enthält, wollen wir sagen, er sei aus den beiden ersten Bündeln hergeleitet, und die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Bündel wollen wir eine Bündelreihe nennen.

Diese Herleitung neuer Bündel kann nur dann als natürlich angesehen werden, wenn sie von der Wahl der Punkte α und β unabhängig ist. Um uns davon zu überzeugen, liefern wir den Beweis des folgenden Satzes:

Gehören die drei Strahlentripel (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) und (a', b', c') je einem Strahlenbündel an, gehen die Strahlen a_1, a_2, a' durch einen Punkt α, die Strahlen b_1, b_2, b' durch einen Punkt β, die Strahlen c_1, c_2, c' durch einen Punkt γ, liegen die drei Geraden a_1, a_2, a', sowie b_1, b_2, b' je in einer Ebene, so gehören auch die drei Geraden c_1, c_2 c' einer Ebene an.

Wir beweisen den Satz zunächst unter der Annahme, dafs die Punkte α, β, γ in gerader Linie liegen, und nehmen einen Punkt δ auf dieser Geraden hinzu, durch den sich eine Ebene legen läfst, welche die neun angeführen Strahlen schneidet. Bezeichnet man die Schnittpunkte mit α_1, α_2, α', β_1, β_2, β', γ_1, γ_2, γ' (wo α_1 auf der Geraden a_1 u. s. w. liegt), so sind die Doppel-



verhältnisse $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta) = (\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta) = (\alpha'\beta'\gamma'\delta)$ einander gleich da jedes gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ist. In der durch δ gelegten Ebene liegen die drei Geraden $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ und $\gamma_1\gamma_2$, und wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta)$ und $(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta)$ gehören diese drei Geraden einem Büschel an. Dasselbe gilt für die drei Geraden $\alpha_1\alpha'$, $\beta_1\beta'$ und $\gamma_1\gamma'$. Diese beiden Strahlenbüschel sind identisch, da sie zwei Geraden gemein haben; also müssen auch die beiden durch den Punkt γ_1 gehenden Strahlen zusammenfallen, oder der Punkt γ' liegt in der Ebene $\gamma_1\gamma_2$, die Gerade c' also in der Ebene $(c_1 c_2)$.

Ist aber γ ein beliebiger Punkt des Raumes, so kann man eine Gerade hindurchlegen, welche die beiden Ebenen $(a_1 a_2)$ und $(b_1 b_2)$ trifft; das geschehe in den Punkten μ und ν. Von μ mögen die Geraden m_1, m_2, m', von ν die Geraden n_1, n_2, n' derartig ausgehen, dafs die Geraden m_1 und n_1 dem ersten, m_2 und n_2 dem zweiten, m' und n' dem dritten Bündel angehören. Da der Punkt μ in der Ebene $(a_1 a_2)$ liegt und diese auch den Strahl a' enthält, so gehören der Ebene $(a_1 a_2)$ auch die Geraden m_1, m_2, m' an; ebenso enthält die Ebene $(b_1 b_2)$ auch die Geraden n_1, n_2, n'. Dafs jetzt die drei Geraden c_1, c_2, c' in einer Ebene liegen, folgt aus dem ersten Teile des Beweises, indem man die Punkte α und β durch μ und ν ersetzt.

6. Aus diesem Satze kann man zahlreiche Folgerungen ziehen.

a) Jeder Bündel, der einer durch zwei Bündel bestimmten Reihe angehört, ist bekannt, sobald einer seiner Strahlen gegeben ist; dieser Strahl ist aber nicht willkürlich, sondern kann nur noch in einer Ebene beliebig angenommen werden, sobald man einen Punkt kennt, durch den er hindurchgehen soll.

Gehen vom Punkte α die Strahlen a_1 und a_2 der beiden gegebenen Bündel aus, so ist durch einen Strahl a', der durch α in der Ebene $(a_1 a_2)$ gelegt wird, ein Bündel der Reihe bestimmt. Liegt nämlich der Punkt π nicht in der Ebene $(a_1 a_2)$ und sind p_1 und p_2 die hindurchgehenden Strahlen der ersten Bündel, so ist der durch π gehende Strahl des neuen Bündels der Schnitt der Ebenen $(p_1 p_2)$ und $(a'\pi)$.

b) Die Bündelreihe ist durch zwei beliebige ihrer Bündel bestimmt; zwei verschiedene Bündelreihen haben höchstens einen Bündel gemein.

Die Richtigkeit des ersten Teiles der Behauptung, aus dem der zweite Teil unmittelbar folgt, leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dafs die Konstruktion einen ebenen Strahlenbüschel benutzt.

c) Alle Bündel der Reihe haben die Ebenen eines Büschels gemein; umgekehrt gehören alle Bündel, die einen Ebenenbüschel gemein haben, einer Bündelreihe an.

Der erste Satz folgt unmittelbar aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Hilfssatze; der Beweis der Umkehrung ist derselbe wie der des Satzes a).

d) Vier Ebenen des Büschels haben ein festes Doppelverhältnis, d. h. das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Ebenen von einer sie durchsetzenden Geraden geschnitten werden, ist von der Wahl dieser Geraden unabhängig.

Eine Gerade treffe die vier Ebenen in den Punkten α, β, γ, δ, eine zweite in den Punkten α', β', γ', δ'. Es giebt stets eine Gerade, die einen Punkt des ersten mit einem Punkt des zweiten Quadrupels verbindet und die beiden andern Ebenen schneidet. So möge die Gerade $\alpha\delta'$ mit den beiden andern Ebenen die Punkte β_1 und γ_1 gemein haben. Dann gehören die Geraden $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ und $\delta\delta_1$ einem Bündel an, und ebenso die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta_1\beta'$, $\gamma_1\gamma'$. Demnach ist das Doppelverhältnis $(\alpha\beta_1\gamma_1\delta')$ sowohl gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$ wie gleich $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$.

e) Durch zwei beliebige Ebenen des Büschels ist der Ebenenbüschel und die Bündelreihe eindeutig bestimmt.

Um die durch einen gegebenen Punkt gehende Ebene des Büschels zu konstruieren, kann man den Satz d) benutzen. Man kann aber auch zuerst die Bündelreihe konstruieren; sind A und B die gegebenen Ebenen, a_1 und a_2 zwei in A gelegene, einander schneidende Gerade, so ist durch a_1 und die Ebene B, sowie durch a_2 und B je ein Bündel bestimmt. Nach 3. kann man die durch einen beliebigen Punkt γ gehenden Strahlen c_1 und c_2 dieser Bündel leicht finden; die Ebene $(c_1 c_2)$ gehört dem Büschel an.

f) Haben zwei demselben Bündel der Reihe angehörende Strahlen einen Punkt gemein, so geht durch diesen Punkt ein Strahl, der allen Bündeln der Reihe angehört und in dem sich alle Ebenen des Büschels schneiden.

Ist π der Schnittpunkt der Strahlen a' und b', so folgt unmittelbar, dafs alle Strahlen des Bündels $(a'b')$ durch π hindurchgehen. Derjenige Strahl irgend eines andern Bündels der Reihe, der den Punkt π enthält, gehört zwei Bündeln der Reihe an und ist infolge dessen allen ihren Bündeln gemeinsam.

g) Vier Bündel der Reihe haben ein festes Doppelverhältnis; d. h. das Doppelverhältnis der vier von demselben Punkte ausgehenden Strahlen ist von der Wahl des Punktes unabhängig; auch die vier Strahlen, welche die vier Bündel der Reihe mit einem beliebigen fünften Bündel gemein haben, stehen in demselben Dpppelverhältnis.

Gehen von zwei Punkten α und β je vier Strahlen a_1, a_2, a', a'' und b_1, b_2, b', b'' so aus, dafs die Strahlen a_1 und b_1 dem ersten, a_2 und b_2 dem zweiten, a' und b' dem dritten, a'' und b'' dem vierten Bündel angehören, so liegen die vier Strahlen des Punktes α in einer Ebene A und die vier Strahlen des Punktes β in einer Ebene B. Wenn diese Ebenen nicht zusammenfallen, so sind die Strahlen a_1, a_2, a', a'' die Schnittlinien von A und die Strahlen b_1, b_2, b', b'' die Schnittlinien von B mit denselben vier durch die Gerade $\alpha\beta$ gelegten Ebenen; demnach sind die Doppelverhältnisse gleich. Für den Fall, dafs die Ebenen A und B identisch sind, nehme man einen nicht in dieser Ebene gelegenen Punkt hinzu.

Sind noch c_1, c_2, c', c'' vier Strahlen eines der Reihe nicht angehörenden Bündels und liegen diese Geraden der Reihe nach in den vier gegebenen Bündeln, also auch in derselben Ebene C, so liegt der durch α gehende Strahl a_0 des neuen Bündels nicht in der Ebene A, aber mit jeder der vier Geraden c_1, c_2, c', c'' in einer Ebene. Demnach sind die Strahlen a_1, a_2, a', a'' die Schnittlinien von A und die Strahlen c_1, c_2, c', c'' die Schnittlinien von C mit vier durch die Gerade a_0 gelegten Ebenen; sie haben also dasselbe Doppelverhältnis.

Auch die weiteren Sätze über Doppelverhältnisse übertragen sich unmittelbar. So giebt es, nachdem drei Bündel einer Reihe gegeben sind, in der Reihe stets einen und zwar einen einzigen Bündel, von der Art, dafs die vier Bündel ein vorgeschriebenes Doppelverhältnis haben.

h) Liegen zwei Punkte α und β in derselben Ebene eines Büschels und gehen für drei Bündel der zugehörigen Reihe durch α die Strahlen a_1, a_2, a_3, durch β die Strahlen b_1, b_2, b_3, so sind die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta, a_1, a_2, a_3)$ und $(\beta\alpha, b_1, b_2, b_3)$ einander gleich. Wenn umgekehrt drei Bündel eine Ebene gemein haben und für zwei in dieser Ebene gelegene Punkte die angegebenen Doppelverhältnisse gleich sind, so gehören die Bündel einer Reihe an.

Für den Beweis des ersten Teiles wende man den Satz g) auf die drei gegebenen und den durch die Gerade $\alpha\beta$ bestimmten Bündel der Reihe an. Um die Umkehrung zu beweisen, konstruiere man in der durch die beiden ersten Bündel bestimmten Reihe denjenigen Bündel, der den Strahl a_3 enthält; da dieser Bündel nach dem ersten Teile des Satzes auch den Strahl b_3 enthält, ist er mit dem dritten gegebenen Bündel identisch.

7. Den Strahlenbündel bezeichnen wir entweder durch mehrere seiner Elemente, z. B. durch (ab), wenn a und b zwei seiner Strahlen sind, oder durch einen eingeklammerten griechischen Buchstaben. Diese Zeichen setzen wir mit anderen Zeichen zusammen; so soll α (λ) den durch den Punkt α gehenden Strahl des Bündels (λ) bezeichnen. Ebenso bedeutet (λ) (μ) die Bündelreihe, der die Bündel (λ) und (μ) angehören. Ähnliche weitere Bezeichnungen werden im Zusammenhang sofort verständlich sein, bedürfen also wohl keiner Erklärung.

Dafs der Strahlenbündel durch zwei seiner Strahlen oder auch durch einen Strahl und eine Ebene bestimmt ist, wurde bereits oben erwähnt. Demnach läfst sich auch jeder Strahl eines Bündels konstruieren, sobald drei seiner Ebenen gegeben sind, von denen mindestens zwei einander schneiden. Wenn aber drei Ebenen des Bündels bekannt sind, von denen keine zwei eine Schnittlinie besitzen, dürfte die Konstruktion Schwierigkeit machen, falls man nur die in den Nummern 3 und 4 angegebenen Eigenschaften des Strahlenbündels benutzen will; dagegen gestatten die Sätze über den Ebenenbüschel eine einfache Lösung der Aufgabe. Sollen die Ebenen A, B, C einem Strahlenbündel angehören, so mufs dieser Bündel alle Ebenen des durch die Ebenen A und B bestimmten Büschels enthalten. Man lege also durch einen Punkt π der Ebene C die zum Büschel (AB) gehörende Ebene D. Der durch die Schnittlinie der Ebenen C und D und die Ebene A bestimmte Bündel enthält offenbar auch die Ebene B, genügt also der Aufgabe. Dafs es aber keinen weitern Bündel giebt, der die drei Ebenen A, B, C enthält, bedarf keines Nachweises; es ist ja vorausgesetzt, dafs die Ebenen keinem Büschel angehören.

8. Drei Bündel, die nicht in einer Reihe liegen, können höchstens eine Ebene gemein haben, da die Bündel, welche einen Strahl oder zwei Ebenen gemeinschaftlich haben, einer Reihe angehören. Aus drei solchen Bündeln kann man unendlich viele weitere dadurch herleiten, dafs man jeden Bündel der aus zwei unter ihnen gebildeten Reihe mit dem dritten Bündel zu einer Reihe vereinigt. Die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Bündel nennen wir ein Bündelfeld. Bei der angegebenen Definition wird einer der gegebenen Bündel vor den beiden andern bevorzugt; wir wollen nachweisen, dafs die drei Bündel nicht nur unter einander, sondern auch mit drei beliebigen andern Bündeln des Feldes vertauscht werden können, wofern die letzteren nur nicht einer Reihe angehören. Zu dem Ende benutzen wir folgenden Satz:

Alle diejenigen Bündel eines Feldes, welche eine gegebene Ebene enthalten, bilden eine Bündelreihe.

Gegeben seien die Bündel (λ), (π), (ϱ). Aus den beiden letzten bilde man eine Reihe, vereinige jeden ihr angehörenden Bündel (σ) mit dem Bündel (λ) zu einer neuen Reihe und suche

in jeder solchen Reihe denjenigen Bündel (σ'), der eine feste Ebene A enthält. Aus der Reihe (π) (ϱ) fügen wir einen vierten Bündel (τ) bei, der nur der folgenden Bedingung genügt: Auf einem seiner Strahlen giebt es zwei Punkte α und β von der Art, dafs die durch sie hindurchgehenden Strahlen des Bündels (λ) die Ebene A schneiden; das geschehe in den Punkten α' und β'. Wie (σ') denjenigen Bündel der Reihe (λ) (σ) darstellt, welcher die Ebene A enthält, so mögen auch die Bündel (π'), (ϱ'), (τ') die Ebene A enthalten und bez. den Reihen (λ) (π), (λ) (ϱ), (λ) (τ) angehören.

Das Doppelverhältnis der vier Bündel (π), (ϱ), (σ), (τ) ist gleich dem ihrer von α ausgehenden Strahlen oder auch gleich dem der vier durch α (λ) gelegten Ebenen, von denen jede einen dieser Strahlen enthält. Diese vier Ebenen schneiden aber die Ebene A in vier vom Punkte α' ausgehenden und je einem der vier Bündel (π'), (ϱ'), (σ'), (τ') angehörenden Strahlen. Dieselbe Erwägung kann man für die Punkte β und β' machen. Die vier vom Punkte α' ausgehenden Strahlen der Bündel (π'), (ϱ'), (σ'), (τ') haben daher dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden durch den Punkt β' gehenden Strahlen. Da der vierte dieser Strahlen beidemal die Gerade $\alpha'\beta'$ ist, so bilden die von den zwei Punkten α' und β' ausgehenden Strahlen der Bündel (π'), (ϱ'), (σ') mit der Geraden ($\alpha'\beta'$) gleiche Doppelverhältnisse und gehören somit (nach 6. h) einer Bündelreihe an.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze folgt sofort der folgende:

Hat eine Bündelreihe mit einem Bündelfelde zwei Bündel gemein, so gehört sie ganz dem Felde an.

Ist nämlich A eine Ebene, welche den beiden Bündeln gemeinsam ist, so gehören alle Bündel des Feldes, welche die Ebene enthalten, einer Reihe an; da diese Reihe mit der gegebenen zwei Bündel gemein hat, mufs sie mit ihr identisch sein.

Dieser Satz gestattet, das Bündelfeld in engen Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Strahlenbündel zu bringen. Es seien (σ_1), (σ_2), (σ_3) drei Bündel des Feldes, von denen wir nur voraussetzen, dafs sie keinen Ebenenbüschel gemein haben. Von einem beliebigen Punkte α aus mögen die Strahlen a_1, a_2, a_3 ausgehen, von denen jeder dem mit gleicher Marke versehenen Bündel angehört. Lägen diese drei Strahlen in einer Ebene, so gehörten entweder die drei Bündel einer Reihe an, oder die Ebene wäre

den drei Bündeln gemeinsam. Der erste Fall ist von selbst ausgeschlossen, der zweite kann dadurch beseitigt werden, dafs man α aufserhalb der etwa vorhandenen gemeinsamen Ebene annimmt. Jetzt giebt es stets einen einzigen Bündel der Reihe, der einen durch α gelegten Strahl a enthält; der Bündel ist also durch diesen Strahl eindeutig bestimmt. Jeder durch α gelegten Ebene entspricht hierbei eine Bündelreihe.

9. Die durchgeführten Entwicklungen führen sehr leicht zu folgenden Sätzen:

a) Haben zwei Bündelfelder drei Bündel gemein, die nicht einer Reihe angehören, so sind sie identisch.

b) Zwei Bündelreihen, die demselben Felde angehören, haben stets einen Bündel gemein.

Die am Schlusse der letzten Nummer erwähnte Abbildung führt den Satz darauf zurück, dafs zwei Ebenen, die einen Punkt gemein haben, sich in einer Geraden schneiden.

c) Ein beliebiges Bündelfeld und eine nicht in ihr enthaltene Bündelreihe haben stets einen einzigen Bündel gemein.

Dem Ebenenbüschel, welchen die Bündel der Reihe gemeinsam haben, mögen die Ebenen A und B angehören; in A wählen wir einen Punkt α, in B einen Punkt β beliebig. Alle durch α in A gezogenen Geraden bestimmen eine dem Felde angehörende Bündelreihe; zu jedem einzelnen Bündel dieser Reihe gehört ein durch β gehender Strahl, und die Gesamtheit dieser Strahlen liegt in einer Ebene B'. Schneiden die Ebenen B und B' einander in einer Geraden b und die Ebenen $(\alpha\beta)$ und A einander in a, so ist der durch die Geraden a und b bestimmte Bündel der Reihe und dem Felde gemeinschaftlich.

d) Zwei Bündelfelder, die nicht zusammenfallen, haben eine Bündelreihe gemein.

Im ersten Felde wähle man zwei Bündelreihen, die nur der Bedingung unterliegen, dafs der ihnen gemeinsame Bündel dem zweiten Felde nicht angehört. Da jede dieser Reihen mit dem zweiten Felde einen Bündel gemein hat, so liegt die durch diese Bündel bestimmte Reihe in beiden Feldern. Ein weiterer Bündel kann beiden Feldern nicht angehören, ohne dafs sie identisch werden.

e) Wenn zwei Strahlen eines dem Felde angehörenden Bündels

einen Punkt gemein haben und somit alle Strahlen dieses Bündels durch den Punkt gehen, so läfst sich durch den Punkt eine Ebene legen, die allen Bündeln des Feldes angehört; zugleich ist jeder Punkt der Ebene Mittelpunkt für einen Bündel des Feldes.

Zwei (und damit alle) Strahlen des Bündels (σ) mögen durch den Punkt π gehen. Man ziehe durch π die beiden Strahlen p_1 und p_2, welche zu zwei anderen Bündeln (σ_1) und (σ_2) des Feldes gehören. Diese Strahlen können nicht zusammenfallen, ohne dafs die Bündel (σ), (σ_1), (σ_2) einer Reihe angehören, was wir ausschliefsen. Demnach haben die drei Bündel und somit alle Bündel des Feldes die Ebene ($p_1 p_2$) gemein. Ist ϱ ein anderer Punkt dieser Ebene und gehört der Punkt α ihr nicht an, so gehört die Gerade $\alpha\varrho$ einem einzigen Bündel des Feldes an. Da diesem Bündel auch die Ebene ($p_1 p_2$), also auch mindestens eine durch ϱ in dieser Ebene gezogene Gerade angehört, derselbe somit zwei durch ϱ gehende Strahlen enthält, so ist der Punkt ϱ der Mittelpunkt dieses Bündels.

10. Die durch die vorstehenden Entwicklungen gewonnenen Sätze beanspruchen ohne Zweifel hohes Interesse. Es zeigt sich nämlich, dafs alle Sätze über Punkte, Gerade und Ebenen ihre volle Gültigkeit behalten, wofern man den Punkt durch den Strahlenbündel, die gerade Punktreihe durch die Bündelreihe und das ebene Punktfeld durch das Bündelfeld ersetzt. Wenn dabei die neu gefundenen Sätze vor den allgemein bekannten an Anschaulichkeit zurücktreten, so wird dieser Mangel durch die volle Allgemeinheit der neuen Sätze reichlich aufgewogen. Denn die Sätze über den Schnitt von Ebenen und Geraden erleiden Ausnahmen, da man von vornherein gar nicht weifs, ob ein Schnitt vorhanden ist. Dagegen gelten für die Strahlenbündel und die aus ihnen auf die angegebene Weise hergeleiteten Gebilde alle Sätze in voller Allgemeinheit.

Hierbei ist wohl zu beachten, dafs die gewonnenen Sätze nur die Punkte, Geraden und Ebenen des fest begrenzten Bereiches betreffen, der von Anfang an der Untersuchung zu Grunde gelegt war. Wofern eine Erweiterung über diesen Bereich ausgeschlossen ist, dürfen wir eine neue Bezeichnung einführen, durch welche die entwickelte Theorie noch enger mit den ersten Sätzen der Geometrie verknüpft wird. Wir nennen in diesem Falle

jeden Strahlenbündel, dessen Strahlen einander nicht schneiden, einen »idealen oder uneigentlichen Punkt«; ebenso bezeichnen wir die Bündelreihe, deren Strahlenbündel keine Gerade gemein haben, als eine »ideale Gerade«, und das Bündelfeld, dessen Bündel keine gemeinsame Ebene besitzen, als eine »ideale Ebene«. Hiernach enthält jede reelle Gerade auch ideale Punkte, die reelle Ebene neben reellen Geraden und Punkten auch ideale Gerade und Punkte. Indem wir diese Ausdrücke benutzen, gewinnt der Ausspruch der Sätze an Einfachheit und Leichtigkeit, und alle Sätze gelten in voller Allgemeinheit: je zwei Ebenen haben eine Gerade, irgend zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, einen Punkt gemeinschaftlich.

Noch berechtigter ist die Einführung der idealen Gebilde, wenn man für den Raum als Ganzes die Voraussetzung macht, dafs zwei Ebenen höchstens eine Gerade, zwei Gerade derselben Ebene höchstens einen Punkt gemeinschaftlich haben, ohne dafs man annimmt, zwei Ebenen besäfsen jedesmal eine Schnittlinie. Demnach wird die Lobatschewskysche Geometrie die idealen Gebilde noch weniger entbehren können als die Euklidische.

Wenn man aber ein endliches Gebiet, für das unsere Voraussetzungen gelten, unbegrenzt erweitert, so ist es nicht ohne Bedenken, die angegebene Ausdrucksweise zu benutzen. Bei diesem Prozefs gehen offenbar ideale in wirkliche Punkte über. Will man aber den Strahlenbündel als Ersatz für einen Punkt ansehen, so mufs man die Voraussetzung machen, dafs die Strahlen und Ebenen eines Bündels auch bei Erweiterung des Gebiets nur einen einzigen Punkt gemein haben, und dafs durch den Schnittpunkt von irgend zwei Strahlen eines Bündels alle seine Strahlen und Ebenen hindurchgehen. Keine dieser Annahmen ist aber notwendig. Schon die Riemannsche Raumform zeigt, dafs die Strahlenbündel auch zwei Mittelpunkte besitzen können. Auch ist es, wie der vierte Abschnitt gelehrt hat, ganz wohl möglich, dafs zwei Strahlen eines Bündels sich in einem Punkte treffen, durch den seine übrigen Strahlen nicht hindurchgehen. Wollte man also von vornherein von idealen Gebilden sprechen, so würde es nicht möglich sein, die verschiedenen Möglichkeiten aufzufinden, die sich bei Erweiterung des Gebietes herausstellen. Demnach mufsten wir auch bei den vorangehenden Entwicklungen

die schwerfällige Ausdrucksweise beibehalten und durften nicht sofort die idealen Punkte, Geraden und Ebenen einführen.

11. Zum Schlufs noch folgende Bemerkung. Statt die idealen Gebilde, wie hier geschehen ist, auf einem synthetischen Wege einzuführen, kann man auch durch analytische Betrachtungen zu ihnen gelangen. Wie mehrfach erwähnt ist, kann man die Lage eines jeden Punktes, der dem abgegrenzten Raumteil angehört, durch das Verhältnis von vier Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3 derartig bestimmen, dafs die Gleichung jeder Ebene homogen linear in den Koordinaten ist. Wenn jetzt dem Wertquadrupel (x_0, x_1, x_2, x_3) kein Punkt des Raumteiles entspricht, so wollen wir es als einen idealen Punkt bezeichnen. Zudem wollen wir sagen, irgend ein Gebilde enthalte einen idealen Punkt, wenn die Gleichung des Gebildes durch Einsetzen der entsprechenden Koordinatenwerte befriedigt wird. Hiernach weist man leicht nach, dafs für die Gesamtheit der durch einen Punkt gehenden Geraden und Ebenen stets dieselben Gesetze gelten, mag der Punkt reell oder ideal sein. Man erhält somit auch Strahlenbündel, die keinen reellen Mittelpunkt besitzen, und kann einen solchen (d. h. die dem abgegrenzten Raumteile angehörenden Ebenen und Strahlen desselben) als Ersatz für den Mittelpunkt betrachten.

Ebenso kann man festsetzen, dafs für veränderliche Gröfsen u und v durch die Gleichungen

$$x_\varkappa = a_\varkappa u + b_\varkappa v \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3)$$

stets eine gerade Linie und durch jede homogene lineare Gleichung zwischen x_0, x_1, x_2, x_3 stets eine Ebene dargestellt werden soll. Dann mufs eine Gerade oder Ebene, deren sämtliche Punkte ideal sind, selbst als ideal bezeichnet werden. Diese Festsetzungen gestatten, die in diesem Paragraphen synthetisch hergeleiteten Sätze mit grofser Einfachheit auf analytischem Wege zu beweisen.

§ 3.

Der projektive Raum als Ganzes.

1. Wie wir gesehen haben, ist es am passendsten, sich bei der Untersuchung des projektiven Raumes zunächst auf ein endliches, allseits begrenztes Gebiet zu beschränken. Dann gelten, wie die Voraussetzungen, so auch die Resultate zuvörderst nur

für diesen Bereich. Man setze jetzt für ein zweites Gebiet, das zum Teil mit dem gegebenen zusammenfällt, zum Teil über dasselbe hinausgeht, dieselben Gesetze voraus und nehme an, dafs in dem beiden Gebieten gemeinsamen Teile auch die sämtlichen Geraden und Ebenen zusammenfallen. In derselben Weise kann man fortfahren und dadurch den Raum als Ganzes bestimmen. Einem solchen Raume wird man Projektivität beilegen müssen, weil sich um jeden seiner Punkte ein Bereich abgrenzen läfst, für den unsere Voraussetzungen und demnach auch alle unsere Folgerungen gültig sind. Im übrigen werden sich aber ganz verschiedene Fälle als möglich herausstellen. Um diese klassifizieren zu können, ist es gut, eine Raumform zu Grunde zu legen, in der besonders einfache Gesetze gelten und die deshalb vielfach allein als der projektive Raum bezeichnet wird.

2. Für diese Raumform gilt das Gesetz, dafs irgend zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, sich schneiden, und zwar jedesmal in einem einzigen Punkte. Es kommt dies darauf hinaus, im Anschlufs an den vorigen Paragraphen jedem Strahlenbündel einen, und zwar einen einzigen Mittelpunkt beizulegen und die Forderung beizufügen, dafs irgend zwei Strahlen eines Bündels nur den Scheitel gemein haben. Dafs diese Forderungen erfüllbar sind, leuchtet ohne jeden Beweis ein, namentlich, wenn man die im vorigen Paragraphen bewiesenen Sätze berücksichtigt; die dort eingeführten idealen Gebilde verdienen diesen Namen nur für den zuvörderst ausgewählten Bereich; für den Raum als Ganzes sind sie aber reell. Hierbei bleiben die beiden ersten Voraussetzungen des § 1 für jeden Raumteil und für den Raum als Ganzes in Gültigkeit. Nur die dritte Voraussetzung mufs aufgegeben werden; denn die Ebene führt keine Zerlegung des Raumes herbei, wie man auf dieselbe Weise nachweist, in der man die Richtigkeit desselben Satzes für die Polarform des Riemannschen Raumes erkennt (B. 1. S. 68 unten). Um diese Raumform analytisch darzustellen, setzen wir fest, dafs jedem Verhältnis der vier Werte x_0, x_1, x_2, x_3 ein Punkt, und zwar ein einziger Punkt entspricht.

Um die Existenz dieser Raumform zu erkennen, kann man auch bei der Polarform des Riemannschen Raumes (dem Kleinschen Raume) von den metrischen Eigenschaften absehen und nur die

projektiven berücksichtigen. Da es Staudt zuerst möglich geworden ist, durch Einführung der idealen Gebilde die euklidische Raumform als einen Raum der hier betrachteten Art darzustellen, möchte es angebracht sein, diese projektive Raumform als eine Staudtsche zu bezeichnen.

3. Eine zweite Raumform, die wir hier erwähnen möchten, ist dadurch charakterisiert, dafs alle Strahlenbündel zwei Mittelpunkte haben, und dafs sich irgend zwei seiner Strahlen nur in diesen beiden Punkten schneiden. Sie entspricht der Riemannschen Raumform. Alle geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen, enthalten noch einen zweiten Punkt, den Gegenpunkt des ersten. Zwei Ebenen haben stets eine Gerade, zwei in derselben Ebene gelegene Gerade stets zwei Punkte gemein. Durch zwei Punkte, die nicht Gegenpunkte von einander sind, kann immer eine einzige Gerade gelegt werden; ebenso ist eine Ebene durch eine Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt bestimmt. Während hier die zweite Voraussetzung insoweit geändert wird, als zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, zwei Punkte gemein haben, bleibt die dritte Voraussetzung ungeändert, da der Raum durch die Ebene zerlegt wird. Dafs diese Raumform als projektivisch bezeichnet werden mufs, ersieht man daraus, dafs man auf die verschiedenste Weise ein Gebiet abgrenzen kann, welches zu keinem seiner Punkte den Gegenpunkt enthält; für ein solches Gebiet gelten aber unsere Voraussetzungen.

Die analytische Behandlung dieses Raumes wird besonders einfach, wenn man zwischen den vier veränderlichen Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 die Relation festsetzt:

$$(1) \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

und jedem Wertsysteme, das dieser Gleichung genügt, einen Punkt zuordnet. Dann entsprechen jedem Verhältnis der vier Koordinaten zwei Wertsysteme x_0, x_1, x_2, x_3, also auch zwei Punkte, die Gegenpunkte von einander sind. Die Ebene wird wieder durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten dargestellt.

4. Um jetzt einen beliebigen projektiven Raum zu untersuchen, bilden wir denjenigen Raumteil, von dem wir ausgegangen sind, kollinear auf einen Staudtschen Raum ab. Erweitern wir das Gebiet des zu untersuchenden Raumes, so dehnt sich auch

der Bereich des Bildraumes aus. Unsere erste Frage betrifft demnach den Bereich, den wir im Staudtschen Raume durch Abbildung des projektiven Raumes erhalten. Offenbar giebt es in dieser Beziehung drei Möglichkeiten:

erstens können wir durch die Abbildung zu jedem Punkte des Staudtschen Raumes gelangen;

zweitens haben wir keinen Raumteil, sondern nur einzelne Flächen, Linien und Punkte auszuschliefsen, und

drittens umfafst das Bild nur einen Teil des Staudtschen Raumes. Da jeder erreichbare Punkt des Raumes innerhalb eines Gebiets liegen soll, für das unsere Voraussetzungen gelten, so müssen wir auch diejenigen Punkte als unerreichbar betrachten, die den auf der Grenze des Bildraumes gelegenen Punkten entsprechen.

Da wir in beiden Räumen entsprechenden Punkten dieselben Koordinatenwerte beilegen dürfen, so lassen sich die eben angegebenen Möglichkeiten auch in folgender Weise charakterisieren: entweder gehört zu jedem Wertsystem der Koordinaten ein erreichbarer Punkt, oder man erreicht alle Koordinatenwerte mit Ausnahme derjenigen, welche gewissen Gleichungen genügen, oder drittens die Gesamtheit der Wertsysteme zerfällt in zwei getrennte Mannigfaltigkeiten, von denen nur die eine zu erreichbaren Punkten gehört, während die andere Mannigfaltigkeit, zu der man auch die gegenseitige Grenze rechnet, wirklichen Punkten nicht zugeordnet ist. Wenn nur eine einzelne Fläche ausgeschlossen ist, so darf sie natürlich den Raum nicht zerlegen, weil im andern Falle mit der Fläche auch der eine Raumteil auszuschliefsen ist. Im übrigen ist die Willkür in der Festsetzung der Grenze überaus grofs; wir begnügen uns, folgende besonders einfache Fälle zu erwähnen:

a) Das Bild umfafst den ganzen Staudtschen Raum; zu jedem Verhältnis der Koordinatenwerte gehört ein erreichbarer Punkt;

b) Die erreichbaren Punkte bilden sich im Staudtschen Raume auf das Innere eines Tetraeders ab; da es möglich ist, die zunächst eingeführten Koordinaten durch beliebige lineare Funktionen derselben zu ersetzen, so dürfen die Grenzflächen die Gleichungen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ besitzen; wählen wir auch den

Einheitspunkt im Innern des Tetraeders, so sind für alle erreichbaren Punkte die sämtlichen Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ positiv;

c) die Gesamtheit der erreichbaren Punkte bildet sich aut das Innere einer Fläche zweiter Ordnung ab, oder für die Koordinatenwerte dieser Punkte gilt die Beziehung:

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 > 0.$$

d) bei der Abbildung wird eine Ebene ausgeschlossen; allen Wertsystemen mit Ausnahme derer, für welche $x_0 = 0$ ist, entsprechen erreichbare Punkte;

e) allen Punkten der Staudtschen Raumform mit Ausschlufs der in zwei windschiefen Geraden gelegenen entsprechen erreichbare Punkte; die Wertsysteme $x_0 = x_1 = 0$ und die Wertsysteme $x_2 = x_3 = 0$ sind auszuschliefsen;

f) nur dem Wertsystem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist kein erreichbarer Punkt zugeordnet.

5. Wenn bei der angegebenen Abbildung jedem Punkte der Staudtschen Raumform ein Punkt des zu untersuchenden Raumes entspricht, so haben wir uns zu fragen, ob nicht jedem Punkte des ersten mehrere Punkte des zweiten zugeordnet werden können. Denken wir uns z. B. eine gerade Linie des Bildraumes, so müssen wir ihren Punkten in stetiger Folge Punkte des abgebildeten Raumes zuordnen; aber es fragt sich, ob man im letzten Raume wieder zum Ausgangspunkte zurückgelangt, wenn man im Staudtschen Raume die gerade Linie einmal vollständig durchlaufen hat. Mit anderen Worten: Wenn jedem Wertsystem $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ein Punkt zugeordnet ist, so kennen wir doch die Zahl der Punkte noch nicht, welche den einzelnen Wertsystemen entsprechen. Es scheint, als ob man jedem Wertsysteme beliebig viele Punkte (in endlicher oder unendlicher Anzahl) zuordnen könne, wofern diese Zahl, wenigstens im allgemeinen, dieselbe ist.

Hierbei ist noch die Möglichkeit zu beachten, dafs demselben Koordinaten-Quadrupel zuweilen erreichbare und zuweilen unerreichbare Punkte entsprechen. So ist es gestattet festzusetzen, dafs allen Wertsystemen der Variabeln zwei Punkte entsprechen, dafs aber dem System $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ nur das eine Mal ein erreichbarer Punkt zugeordnet ist; mit anderen Worten, man nimmt an, dafs jedem Quadrupel, welches der Gleichung (1)

genügt, ein Punkt zugeordnet ist, mit Ausnahme des Wertsystems $(-1, 0, 0, 0)$, dem kein Punkt entsprechen soll.

Wenn bei der angegebenen Abbildung die erreichbaren Punkte einem begrenzten Raume, etwa dem Innern einer Fläche, eines Tetraeders u. dgl. entsprechen, so hat es keinen Zweck, die Fortsetzung des Raumes durch uneigentliche Punkte hin zu verfolgen.

6. An dritter Stelle haben wir uns die Frage vorzulegen, ob verschiedenen Punkten der Staudtschen Raumform derselbe Punkt des abgebildeten Raumes entsprechen kann, oder mit anderen Worten, ob es möglich ist, demselben Punkte verschiedene Wertsysteme $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ und $y_0 : y_1 : y_2 : y_2$ zuzuordnen. Damit um jeden Punkt ein Gebiet sich abgrenzen läfst, für das die aufgestellten Voraussetzungen gelten, müssen zwischen den beiden Wertsystemen mindestens drei Gleichungen bestehen. Eine gröfsere Anzahl von Gleichungen ist natürlich nicht ausgeschlossen; da aber die Klassifizierung der möglichen Fälle nicht einfach sein dürfte, wollen wir hier nur den Fall näher betrachten, wo aus jedem Wertsystem der Variabeln durch drei Gleichungen ein neues Wertsystem hergeleitet wird, das denselben Punkt darstellt. Offenbar müssen die Gleichungen sowohl in den Werten x_0, x_1, x_2, x_3 wie in den Werten y_0, y_1, y_2, y_3 homogen sein; demnach können wir unter Einführung eines Proportionalitäts-Faktors ϱ die Bedingungsgleichungen in der Form schreiben:

$$\varrho y_0 = \varphi_0 (x_0 \ldots x_3), \quad \varrho y_1 = \varphi_1 (x_0 \ldots x_3), \quad \varrho y_2 = \varphi_2 (x_0 \ldots x_3), \quad \varrho y_3 = \varphi_3 (x_0 \ldots x_3),$$

wo die Funktionen $\varphi_0 \ldots \varphi_3$ homogen in den Variabeln sind. Wenn hier zwischen den Variabeln $y_0 \ldots y_3$ eine homogene Gleichung ersten Grades besteht, so gehören die entsprechenden Punkte einer Ebene an; ersetzt man die Variabeln y durch die Werte x, die sich aus den aufgestellten Gleichungen ergeben, so müssen auch die letzteren einer linearen Gleichung genügen. Das ist nur möglich, wenn die vier Funktionen $\varphi_0 \ldots \varphi_3$ vom ersten Grade sind, die Bedingungsgleichungen also die Form haben:

$$(2) \quad \varrho y_0 = \sum_{\varkappa} a_{0\varkappa} x_{\varkappa} \; \ldots \; \varrho y_3 = \sum_{\varkappa} a_{3\varkappa} x_{\varkappa}.$$

Die Auffindung der Bedingungen, denen die Koefficienten in diesen Substitutionen genügen müssen, stützt sich auf Erwägungen, die bereits im vierten Abschnitt durchgeführt sind. Vor allem

darf weder die Substitution (2) noch irgend eine, die man aus ihr durch Wiederholung herleitet, es unmöglich machen, um jeden Punkt einen der Forderungen der Projektivität genügenden Bereich abzugrenzen. Ebensowenig darf die Grenze der erreichbaren Punkte durch die Substitution (2) geändert werden. Wenn also z. B. die vorgelegte projektive Raumform im Staudtschen Raume sich auf das Innere eines Tetraeders abbildet und die Seitenflächen zu Koordinaten-Ebenen gewählt werden, so müssen in den Gleichungen (2) alle Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ verschwinden, für welche die Marken ι und $\varkappa$ ungleich sind. Ist das Grenzgebilde die Ebene $x_0 = 0$, so geht φ_0 in x_0 über. Wofern endlich nur das Wertsystem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ einen idealen Punkt darstellt, mufs $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ sein.

Noch in anderer Weise übt die Grenze der erreichbaren Punkte einen Einflufs auf die Koefficienten in den Gl. (2) aus. Die Gleichungen (2) liefern gewisse Wertsysteme, für welche $y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ist. Ist eines derselben reell, so darf es keinen erreichbaren Punkt darstellen, weil im andern Falle, wie wir im vierten Abschnitt gezeigt haben, um diesen Punkt in jedem noch so kleinen Bereich der Schnitt zweier Ebenen aus mehreren geraden Linien bestehen würde (B. 1 S. 321).

Sobald demnach die Grenze der Raumform bekannt ist, lassen sich ohne Mühe die Bedingungen angeben, denen die Koefficienten in den Gleichungen (2) genügen müssen, damit die durch diese Gleichungen verbundenen Wertsysteme geeignet sind, denselben Punkt darzustellen. Wird eine solche Substitution durch die Gleichungen (2) gegeben, so liefert die Wiederholung dieser und der aus ihr durch Inversion erhaltenen Substitution eine endliche oder unendliche Zahl von Wertsystemen, die zu demselben Punkte gehören, und zwar wird diese Zahl endlich sein, wenn die gegebene Substitution durch eine endliche Zahl von Wiederholungen in die identische Substitution übergeht. Nun ist es möglich, dafs derselbe Punkt jedesmal noch durch andere Wertsysteme z dargestellt wird, welche mit den Gröfsen x durch die Gleichungen verbunden sind:

$$z_\alpha = \sum_{\varkappa} b_{\alpha\varkappa} x_\varkappa.$$

Natürlich müssen dann nicht nur die Koefficienten $b_{\alpha\varkappa}$ den soeben

charakterisierten Bedingungen genügen, sondern es mufs auch jede Substitution, die man aus beiden nach beliebiger Wiederholung durch Kombination herleiten kann, die gleiche Eigenschaft besitzen.

Eine Reihe von Möglichkeiten leitet man aus den im vierten Abschnitt behandelten Beispielen durch projektive Umgestaltung her; einen solchen Fall möchten wir im folgenden selbständig entwickeln.

7. Wir nehmen an, dafs zu jedem Wertsystem ein, und zwar ein einziger Punkt gehört. In diesem Falle dürfen die Gleichungen $y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ oder die Gleichungen

$$\varrho x_\alpha = \sum_\varkappa a_{\alpha\varkappa} x_\varkappa$$

keine reelle Lösung besitzen. Sobald dieser Bedingung genügt ist, kann man durch Einführung neuer Variabeln die Gleichungen (2) in die Form bringen:

$$(3)\quad \begin{aligned} \varrho y_0 &= \alpha x_0 - \beta x_1 \\ \varrho y_1 &= \beta x_0 + \alpha x_1 \\ \varrho y_2 &= \gamma x_2 - \delta x_3 \\ \varrho y_3 &= \delta x_2 + \gamma x_3. \end{aligned}$$

Setzt man hier: $\alpha = k \cos \mu$, $\beta = k \sin \mu$, $\gamma = l \cos \nu$, $\delta = l \sin \nu$, so gehen bei Wiederholung dieser Substitution die Gröfsen k und l in k^n resp. l^n, μ und ν in $n\mu$ resp. $\nu\mu$ über. Wenn die hier benutzte Gröfse μ in einem irrationalen Verhältnis zu der Zahl π $(= 3, 14 \ldots)$ steht, so kann man für ganzzahlige Werte von p und q die Werte $q\mu$ und $2p\pi$ beliebig nahe an einander bringen, ohne dafs sie gleich werden. Man kann also von jedem Punkte der Linie $x_2 = x_3 = 0$ Gerade ziehen, die in einem beliebig ausgewählten Bereich zwei Punkte gemein haben. Demnach ist dieser Fall auszuschliefsen. Die Zahlen μ und π müssen also in einem rationalen Verhältnis stehen, oder man kann zwei ganze Zahlen m und n bestimmen, für die $n\mu = 2m\pi$ ist. Dann erhält die Substitution (3), $(n-1)$-mal wiederholt, nach Division durch k^m eine Form, die aus (3) hervorgeht, wenn man $\alpha = 1$, $\beta = 0$ setzt. Da hier für $x_2 = x_3 = 0$ allgemein $y_\alpha = x_\alpha$ ist, genügt diese Substitution den aufgestellten Bedingungen nur, wenn diese Substitution in die identische übergeht, wenn also auch $\gamma = 1$, $\delta = 0$ ist. Indem man dieselbe Betrachtung unter Vertauschung

der Gröfsen μ und ν anstellt, erkennt man, dafs $\mu = \nu$ sein mufs. Nun darf man die sämtlichen Transformations-Koefficienten durch dieselbe Zahl dividieren und die gegebene Substitution durch irgend eine andere ersetzen, die aus ihr durch Wiederholung hervorgeht, wofern nur durch Wiederholung der letzteren die gegebene erhalten werden kann. Demnach darf man $\alpha = \gamma = \cos \frac{2\pi}{n}$, $\beta = \delta = \sin \frac{2\pi}{n}$ annehmen, und dann stellen die Gleichungen (3) eine Transformation des Staudtschen Raumes dar, bei welcher jeder Punkt in einer bestimmten geraden Linie verbleibt und alle dadurch erhaltenen Geraden ihre Lage nicht ändern. (Diese Geraden bilden, wie beiläufig erwähnt werden möge, eine lineare Kongruenz mit imaginären Direktricen.)

Um die Art der hierdurch erhaltenen Zuordnung noch deutlicher zu übersehen, gehen wir von zwei windschiefen Geraden aus und setzen auf folgende Weise eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der beiden Geraden fest. Man mache eine dritte Gerade, welche mit keiner der beiden Geraden in einer Ebene liegt, zur Achse eines Ebenenbüschels und lasse diejenigen Punkte der Geraden einander entsprechen, in denen sie von derselben Ebene des Büschels geschnitten werden. Hierauf führe man eine projektive Zuordnung der Punkte der ersten Geraden ein, bei der kein Punkt sich selbst entspricht, und die geeignet ist, nach einer gewissen endlichen Zahl von Wiederholungen jeden Punkt sich selbst zuzuordnen. Vermittelst der projektiven Beziehung, die zwischen den beiden Geraden besteht, überträgt man diese Zuordnung auf die zweite Gerade: sind nämlich α und α' zwei Punkte der ersten, β und β' zwei Punkte der zweiten Geraden, entspricht infolge der ersten Zuordnung der Punkt β dem Punkte α, der Punkt β' dem Punkte α' und ist α' zu α zugeordnet, so soll auch der Punkt β' zu β zugeordnet sein. Bei einer kollinearen Zuordnung des Staudtschen Raumes zu sich selbst, bei der die Punkte jeder von diesen beiden Geraden in der angegebenen Weise auf einander bezogen sind, giebt es eine zweifach unendliche Schar von Geraden, von denen jede sich selbst zugeordnet ist. Jetzt kann man eine Raumform dadurch bestimmen, dafs man allen auf diese Weise einander zugeordneten

Punkten des Staudtschen Raumes jedesmal einen einzigen Punkt zuweist.

Das gefundene Resultat zeigt sehr grofse Ähnlichkeit mit dem Satze, den wir über das Zusammenfallen von Punkten einer elliptischen Raumform gefunden haben (B. 1. S. 343); nur sind bei den projektiven Raumformen zwei Gerade willkürlich, während die Metrik verlangt, mit einer Geraden alle Geraden einer von zwei ganz bestimmten Scharen zu verbinden; auch besteht für die Zuordnung der Punkte der einzelnen Geraden im projektiven Raume eine gröfsere Willkür.

8. Vergleichen wir die vorstehenden Untersuchungen (Nr. 6 und 7) mit denen des vierten Abschnitts, so finden wir, dafs die Bedingungen, unter denen verschiedene Koordinatenwerte geeignet sind, denselben Punkt darzustellen, im projektiven Raume wesentlich denselben Gesetzen unterliegen wie in einem metrischen, dafs aber, wofern nicht die Grenzgebilde besondere Beschränkungen herbeiführen, für den projektiven Raum in dieser Hinsicht eine gröfsere Mannigfaltigkeit möglich ist.*) Diese Thatsache findet darin ihre Erklärung, dafs es in einem projektiven Raume genügt, um jeden Punkt ein Gebiet abgrenzen zu können, in welchem sich zwei gerade Linien höchstens in einem Punkte schneiden, während für Räume metrischen Charakters die Forderung hinzukommt, dafs diese Eigenschaft durch keine Bewegung aufgehoben werden darf. Nun läfst sich jede Zuordnung, welche durch Bewegung vermittelt wird, durch eine projektive Transformation darstellen, und die Gesamtheit der allen möglichen Bewegungen entsprechenden Transformationen bildet in dem später zu erläuternden Sinne eine Gruppe. Demnach können wir sagen: In jedem metrischen Raume liefern die Transformationen einer bestimmten Gruppe, auf einen gewissen Bereich angewandt, stets eindeutige Resultate. Macht man diese Forderung für den projektiven Raum, so erhält man gleiche Gesetze wie für den entsprechenden metrischen Raum, wofern nur die Grenze beidemal durch dieselben Gleichungen dargestellt wird. Hiernach drängt

*) Der hier erwähnte Einflufs der Grenzgebilde bewirkt, dafs die Bedingungen, unter denen derselbe Punkt mehreren Koordinatenwerten entspricht, in einem projektiven Raume, dessen Grenze eine ungeradlinige Fläche zweiter Ordnung ist, genau dieselben sind wie in einer hyperbolischen Raumform.

sich die Frage nach den Bedingungen auf, unter denen dasselbe für alle projektiven Transformationen gilt, oder es stellt sich uns die Aufgabe dar:

Nachdem ein gewisser Raumteil abgegrenzt ist, in welchem zwei Ebenen höchstens eine Gerade, zwei Gerade höchstens einen Punkt gemein haben, wird verlangt, dafs jede kollineare Zuordnung, auf diesen Raumteil angewandt, eindeutig ist, so dafs, wenn mit ihm ein anderer Raumteil kollinear verwandt ist, jedem Punkte des einen stets ein einziger Punkt des andern entspricht.

Um zu erkennen, welche Raumformen unter dieser Voraussetzung möglich sind, benutzen wir ein Koordinatensystem, dessen vier Eckpunkte in dem zu Grunde gelegten Raumteile liegen. Jetzt betrachten wir das Resultat der Transformationen:

$$(4) \quad y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = e^t x_0 : x_1 : x_2 : x_3,$$

wofern dem Parameter t alle reellen Werte beigelegt werden dürfen. Hierbei bleibt jeder Punkt der Ebene $x_0 = 0$ ungeändert, und jede Gerade und Ebene, die durch den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ geht, wird in sich verschoben. Da in dem abgegrenzten Gebiete Punkte liegen, für welche die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ alle möglichen Wertsysteme besitzen, demnach bei unbeschränkter Veränderlichkeit von t alle Werte der Verhältnisse $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$ erhalten werden, so sind wir genötigt, jedem Koordinaten-Quadrupel einen erreichbaren Punkt zuzuordnen. Auch kann derselbe Punkt nicht durch verschiedene Quadrupel dargestellt werden; denn wenn die Quadrupel (y_0, y_1, y_2, y_3) und (y_0', y_1', y_2', y_3') zu demselben Punkte gehörten, so müfste dasselbe für die beiden Quadrupel

$$(e^{-t} y_0, y_1, y_2, y_3) \text{ und } (e^{-t} y_0', y_1', y_2' y_3')$$

gelten, da die Transformation (4) eindeutige Resultate liefern soll. Nun kann man aber der Variabeln t einen solchen Wert geben, dafs die Punkte, welche durch die beiden letzten Quadrupel dargestellt sind, innerhalb des zu Grunde gelegten Gebietes liegen; da diese beiden Punkte verschieden sind, wofern die vier Koordinaten nicht dasselbe Verhältnis haben, können auch die beiden ersten Punkte nicht zusammenfallen.

Nur für die Punkte der Ebene $x_0 = 0$ können diese Schlüsse

nicht gezogen werden. Man kann aber irgend ein anderes Koordinaten-Tetraeder benutzen, dessen Eckpunkte ebenfalls in dem Anfangsgebiete liegen, und dadurch die allgemeine Gültigkeit der Schlüsse erweisen. Zu dem Zwecke genügt es, in den Gleichungen (4) die Marke 0 mit einer andern Marke zu vertauschen, oder wenn man lieber will, die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ beizubehalten und die Ebene $x_0 = 0$ durch eine Ebene $x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ zu ersetzen.

Um zu erkennen, wieviel Punkte einem jeden Koordinaten-Quadrupel zugeordnet werden können, transformieren wir eine Ebene, die wir etwa zur Ebene $x_0 = 0$ wählen, so in sich, dafs eine Gerade in sich verschoben wird und ein ihr nicht angehörender Punkt in Ruhe bleibt. Es seien

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = 0$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = 0$$

die Gleichungen zweier durch den ruhenden Punkt gelegter Geraden, ferner

$$a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

die Gleichung der in sich verschobenen Geraden; man setze

$$\xi = \frac{a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3}{a_3 x_1 + b_3 x_1 + c_3 x_3}, \quad \eta = \frac{a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3}{a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3}$$

und wähle ξ', η' als die entsprechenden Funktionen von x_1', x_2', x_3'. Dann soll die Beziehung zwischen x_1', x_2', x_3' und x_1, x_2, x_3 sich aus den Gleichungen ergeben:

$$(5) \quad \xi' = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad \eta' = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi,$$

wo die Gröfse φ als variabel vorausgesetzt wird. Sobald diese Variabele den Wert 2π erhält, wird $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$ und somit $x_1' : x_3' = x_1 : x_3$, $x_2' : x_3' = x_2 : x_3$. Da der eine Eckpunkt des Dreiecks seine Lage beibehalten hat, so kehren für $\varphi = 2\pi$ die Punkte einer jeden von diesem Punkte ausgehenden Geraden und somit alle Punkte in ihre Anfangslage zurück. Nun ist die dritte Gerade in sich verschoben; die stetige Folge der Transformationen, welche aus (5) erhalten werden, wenn man den Parameter φ alle Werte von null bis 2π annehmen läfst, nötigt also jeden Punkt dieser Geraden, die ganze Linie ein- oder mehrmals zu beschreiben.

Nun wird für die Punkte dieser Linie bereits, wenn man $\varphi = \pi$ setzt, $x_1' : x_3' = x_1 : x_3$ und $x_2' : x_3' = x_2 : x_3$. Ver-

schieben wir also eine Gerade in sich, d. h. transformieren wir ihre Punkte stetig in der Weise, dafs die Koordinaten alle für die Punkte der Geraden geeigneten Wertsysteme annehmen, so mufs der Punkt in seine Anfangslage zurückkehren, sobald seine Koordinaten zum zweiten Male die Anfangswerte erreichen.

9. Allen diesen Forderungen genügen die beiden Raumformen, die wir im Anfange dieses Paragraphen betrachtet haben. Denn erstens werden allen Wertsystemen $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ Punkte zugeordnet, und zweitens können niemals Punkte identisch sein, die zu verschiedenen Wertsystemen gehören. Dafs auch die zuletzt gefundene Bedingung durch die beiden Raumformen befriedigt wird, erkennt man sehr leicht. So kann man die Geraden der unter Nr. 3 beschriebenen Raumform in folgender Weise darstellen: Man wähle acht Konstante $a_0 \ldots a_3$, $b_0 \ldots b_3$, zwischen denen die Gleichungen bestehen:

$$a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\quad b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,$$
$$a_0 b_0+a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3=0,$$

und mache die Koordinaten von der veränderlichen Gröfse u abhängig vermittels der Gleichungen:

$$x_\varkappa = a_\varkappa \cos u + b_\varkappa \sin u. \qquad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Zwei verschiedene Werte von u liefern nur dann denselben Punkt, wenn sie sich um Vielfache von 2π unterscheiden. Lassen wir also die Variabele u die Werte von 0 bis 2π annehmen, so beschreibt der jedesmal entsprechende Punkt die gerade Linie.

Nun können wir auch annehmen, die Punkte der in sich verschobenen Geraden kehrten bereits für $\varphi = \pi$ in ihre Anfangslage zurück; denn alsdann wird doch auch für $\varphi = 2\pi$ der Ausgangspunkt wieder erreicht. Dieser Forderung genügt offenbar die Staudtsche Raumform, in der durch das Verhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ ein einziger Punkt dargestellt wird.

10. Wir haben jetzt noch zu zeigen, dafs keine weitere Raumform geeignet ist, die gefundenen Forderungen zu erfüllen. Zu dem Ende wollen wir an erster Stelle beweisen, dafs die Punkte der in sich verschobenen Gerade zum ersten Male in ihre Anfangslage zurückkehren, wenn in der Gleichung (5) die Variabele φ entweder gleich 2π oder gleich π wird. Unsere Entwicklung hat uns gezeigt, dafs für $\varphi = 2\pi$ die Anfangslage erreicht wird. An sich wird hierdurch nur gefordert, dafs die Rückkehr

zum ersten Male in dem Augenblicke erfolgt, wo die Variabele φ für ein ganzzahliges n den Wert $\frac{2\pi}{n}$ annimmt. Entspricht vermittelst der obigen Gleichungen dem Anfangsverhältnis $(x_0:x_1:x_2:x_3)$ für $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ das Wertsystem $(x_0' : x_1' : x_2' : x_3')$, so kann das letztere dem ersteren nur dann gleich sein, wenn n entweder gleich eins oder gleich zwei ist. Da aber, wie wir im Anfange von Nr. 8 bewiesen haben, zu ungleichen Koordinatenwerten nicht derselbe Punkt gehören kann, so mufs $n = 1$ oder $n = 2$ sein.

Lassen wir jetzt in der Gleichung (5) die Gröfse φ von null aus wachsen, bis irgend ein Punkt der in sich verschobenen Geraden zum ersten Male seine Anfangslage wieder annimmt, so mufs, wie die durchgeführte Entwicklung zeigt, jeder Punkt dieser Geraden in die Anfangslage zurückkehren. Wofern also nur die Punkte einer einzigen Geraden l in Betracht kommen, gehört zu jedem Wertsystem der Variabeln entweder ein einziger oder zwei verschiedene Punkte. Nehmen wir an, ein Punkt π der Geraden l werde durch das Verhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, ein zweiter Punkt π' von l werde durch das Verhältnis $(x_0' : x_1' : x_2' : x_3')$ dargestellt, und zu dem ersten Verhältnis gehöre kein zweiter Punkt von l, so kann unter den Punkten von l nur der Punkt π' durch das Verhältnis $(x_0' : x_1' : x_2' : x_3')$ dargestellt werden. Man lege durch π eine zweite Gerade l_1. Diese enthält entweder noch einen Punkt π_1, der zu dem Verhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ gehört, oder dies Verhältnis stellt auch keinen zweiten Punkt der Geraden l_1 dar. Um zu zeigen, dafs die erste Annahme auszuschliefsen ist, bewege man die Ebene (ll_1) so in sich, dafs der Punkt l' in Ruhe gehalten und die Gerade l_1 in sich bewegt wird. Benutzt man wieder die oben eingeführten Gröfsen ξ und η und macht man die Transformation von den Gleichungen (5) abhängig, so gelangt für $\varphi = \pi$ der Punkt P auf P_1, die Gerade l aber zur Deckung mit ihrer Anfangslage. Somit enthält die Gerade l auch den Punkt P_1, was unserer Annahme widerstreitet. Hiernach wird auch auf jeder zweiten durch P gelegten Geraden l_1 dem Wertsystem (x) nur ein einziger Punkt zugeordnet sein. Dasselbe gilt also auch für jeden andern Punkt auf l_1 und somit für jeden beliebigen Punkt des Raumes. Konstruiert man demnach

unter dieser Annahme alle von einem Punkte ausgehenden geraden Linien und verbindet je zwei Punkte, welche auf zwei verschiedenen unter diesen Linien liegen, wieder durch eine Gerade, so erhalten wir einen in sich abgeschlossenen Bereich von der Eigenschaft, dafs jeder Punkt des Bereiches zu einem einzigen Wertsystem ($x_0 : x_1 : x_2 : x_3$) der Variabeln gehört und jedes Wertsystem einen einzigen Punkt des Bereiches darstellt.

Andererseits, wenn zu einem einzigen Wertsystem($x_0 : x_1 : x_2 : x_3$) zwei Punkte gehören, die auf einer geraden Linie liegen, so stellt jedes Verhältnis der vier Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 zwei Punkte von der Eigenschaft dar, dafs alle Gerade, die durch einen der beiden Punkte hindurchgehen, auch den andern enthalten. Wir gelangen auf diese Weise zu einem Bereich, wie er in Nr. 3 beschrieben ist.

11. Um jetzt unsern Nachweis, dafs nur die beiden angegebenen Raumformen der gestellten Forderung genügen, vollständig zu machen, müssen wir zeigen, dafs in jedem der beiden Fälle zu dem bereits gefundenen Bereich kein weiterer als Bestandteil einer Raumform hinzutreten kann. Gehen wir etwa von einem Bereich aus, der die Eigenschaft hat, dafs zu jedem Wertsystem ($x_0 : x_1 : x_2 : x_3$) einer, und zwar ein einziger, seiner Punkte zugeordnet ist; wir wollen untersuchen, ob nicht etwa zu dem Wertsystem (x) ein weiterer Punkt gehören kann, der in einem andern Bereich liegt. Dann darf es nicht möglich sein, durch die beiden Punkte eine gerade Linie zu legen, weil, wie die vorangehende Untersuchung gezeigt hat, demselben Wertsysteme niemals zwei verschiedene Punkte zugeordnet werden können, die auf derselben geraden Linie liegen. Damit ist aber bewiesen, dafs es unmöglich ist, die beiden Bereiche als Bestandteile einer einzigen Raumform zu betrachten; denn da die Bereiche nicht durch gerade Linien zu einem einheitlichen Ganzen verbunden werden können, so besteht überhaupt keine Verbindung zwischen ihnen. Gäbe es nämlich eine Verbindung, so müfste sie doch durch projektiveTransformationen erreicht werden können; nun läfst sich, wie leicht bewiesen werden kann, jede projektive Transformation durch Zusammensetzung aus solchen Transformationen erhalten, bei denen alle Veränderungen in geraden Linien erfolgen, oder mit anderen Worten, bei denen durch jeden Punkt eine in sich transformierte gerade Linie hindurchgeht. Da bei

allen diesen speciellen Transformationen der zuerst gewählte Bereich in sich verbleibt, so kann er auch durch die aus ihnen zusammengesetzte Transformation nicht in einen andern Bereich übergeführt werden.

Ebenso verfährt man unter der Annahme, dafs der Bereich die unter Nr. 3 dargelegten Eigenschaften besitzt. Wir finden also, dafs der gestellten Forderung nur die beiden angegebenen Raumformen genügen. Diese haben aber die weitere Eigenschaft, dafs jede projektive Transformation, mag sie auf einen beliebigen Teil des Raumes oder auch auf den Raum als Ganzes angewandt werden, zu eindeutigen Resultaten führt. Wenn also sämtliche projektive Transformationen für irgend einen Raumteil eindeutige Beziehungen herbeiführen, so gilt dasselbe für jeden Raumteil und für den Raum als Ganzes, und nur die beiden angegebenen Raumformen besitzen diese Eigenschaft. Hiernach entsprechen sie denjenigen metrischen Raumformen, die auch als Ganze bewegt werden können.[12])

§ 4.

Projektivität und Metrik.

1. Die verschiedenen Methoden, durch die man von der Projektivität zur Metrik gelangt, sind bereits im zweiten Abschnitt (B. 1. S. 149—162) besprochen. Indessen konnten wir dort einen Weg, der zu diesem Ziele führt, nur kurz angeben, ohne in seine Begründung einzugehen, weil dabei die Theorie der Transformationsgruppen nicht wohl entbehrt werden kann, eine Theorie, welche im ersten Bande keine Stelle finden konnte. Diese Begründung möchte ich hier nachtragen.[13]) Allerdings sollen die Transformationsgruppen erst im achten Abschnitt behandelt werden; aber es wird gestattet sein, hier bereits einige der dort zu entwickelnden Resultate zu benutzen. Wir gebrauchen dabei nur die Liesche symbolische Bezeichnung einer unendlich kleinen Transformation, den Begriff der Kombination zweier Transformationen und den Satz, dafs einer Gruppe, in der zwei infinitesimale Transformationen vorkommen, auch diejenige Transformation angehört, die man durch Kombination der beiden ersten erhält. Der Leser, der hiermit noch nicht vertraut ist, findet die nötigen Erläuterungen im achten Abschnitt.

Dem Beweise unseres Hauptsatzes möchte ich einige Bemerkungen über beliebige projektive Gruppen vorausschicken.

Zur Darstellung der einzelnen Elemente einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit mögen n + 1 Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$ dienen, wobei wir festsetzen, dafs es nur auf die Verhältnisse und nicht auf die wirklichen Werte dieser Gröfsen ankommt. Jede Transformation, bei der die Verhältnisse der neuen Gröfsen $y_0, y_1 \ldots y_n$ durch homogene lineare Funktionen der gegebenen Variabeln x, also unter Einführung eines Proportionalitäts-Faktors ω in der Form

$$y_\varkappa = \omega \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda$$

ausgedrückt werden, heifst eine projektive Transformation, und eine Gruppe, die nur projektive Transformationen enthält, eine projektive Gruppe. In diesem Falle sind auch die unendlich kleinen Änderungen dx_α der einzelnen Variabeln x_α bis auf einen unendlich kleinen Faktor dt homogene lineare Funktionen von $x_0, x_1 \ldots x_n$. Ersetzt man also in dem Lieschen Symbol einer infinitesimalen Transformation die Zeichen $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ durch p_α, so läfst sich jede unendlich kleine Transformation einer projektiven Gruppe in der Form

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n)$$

darstellen, wo die $(n + 1)^2$ Koefficienten konstante Gröfsen sind. Die Transformation $\Sigma p_\iota x_\iota$ führt keine Änderung in den Verhältnissen der Koordinaten herbei; sie kann daher, mit einer beliebigen Konstanten multipliziert, zu der Form (1) addiert werden, ohne das Ergebnis zu ändern. Wir werden daher in vielen Fällen den Koefficienten $A_{00} = 0$ voraussetzen.

Sind $\Sigma A_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa$ und $\Sigma B_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa$ zwei Transformationen, die derselben Gruppe angehören, so mufs die Gruppe auch

1. jede Transformation $\Sigma (\eta A_{\iota\varkappa} + \zeta B_{\iota\varkappa}) p_\iota x_\varkappa$ für beliebige Koefficienten η und ζ, und

2. die durch ihre Kombination erhaltene Transformation

$$\Sigma (A_{\iota\varkappa} B_{\lambda\iota} - B_{\iota\varkappa} A_{\lambda\iota}) x_\varkappa p_\lambda$$

enthalten.

Unter der allgemeinen projektiven Gruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit verstehen wir diejenige Gruppe,

welche alle projektiven Transformationen enthält; wir können sie durch die n (n + 2) Transformationen $p_0 x_\alpha$, $x_0 p_\alpha$, $p_\alpha x_\beta$ für $\alpha, \beta = 1 \ldots n$ bestimmen.

Ersetzt man in der Form $\Sigma u_\iota x_\varkappa$ jede Gröfse x_ι durch $x_\iota + dx_\iota$ für

$$dx_\iota = dt \sum_\varkappa A_{\iota\varkappa} x_\varkappa,$$

so bleibt die Form ungeändert, wenn man zugleich u_ι durch $u_\iota + du_\iota$ ersetzt und

$$du_\iota = - dt \sum_\varkappa A_{\varkappa\iota} u_\varkappa$$

annimmt. Die unendlich kleine Transformation, denen die Gröfsen u_ι unterliegen, wenn man auf die Gröfsen x die Transformation (1) anwendet, läfst sich demnach für $\frac{\partial f}{\partial u_\iota} = r_\iota$ symbolisch in der Form

$$- \Sigma A_{\varkappa\iota} r_\iota u_\varkappa$$

darstellen.

An Stelle der Variabeln x kann man neue Variabeln y als homogene lineare Funktionen der ersten einführen, indem man setzt:

$$(2) \quad x_\alpha = \sum_\varkappa m_{\alpha\varkappa} y_\varkappa.$$

Drückt man jetzt die Veränderung $dy_0 \ldots dy_n$ durch die Werte $y_0 \ldots y_n$ aus, so kommt dies für $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = q_\varkappa$ darauf hinaus, in der Form (1) mit der Substitution (2) die weitere Substitution

$$(3) \quad q_\iota = \sum_\varkappa m_{\iota\varkappa} p_\varkappa \text{ oder } p_\iota = \sum_\varkappa m'_{\iota\varkappa} q_\varkappa$$

zu verbinden, wo $m'_{\iota\varkappa}$ der Koefficient von $m_{\iota\varkappa}$ in der Determinante $| m_{\iota\varkappa} |$ ist. Damit die Gleichung $\Sigma u_\iota x_\iota = \Sigma v_\iota y_\iota$ identisch erfüllt wird, hat man für $\frac{\partial f}{\partial v_\varkappa} = s_\varkappa$ die Umgestaltungen vorzunehmen

$$v_\iota = \sum_\varkappa m_{\iota\varkappa} u_\varkappa \text{ und } r_\iota = \sum_\varkappa m_{\iota\varkappa} s_\varkappa.$$

2. Lehrsatz: Kommen in einer Gruppe die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transformationen vor:

$$W_{\iota\varkappa} = p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota \quad (\text{für } \iota, \varkappa = 1 \ldots n)$$

und tritt zu ihnen hinzu eine davon unabhängige Transformation

$$(4) \quad p_0 \sum_{\varkappa} a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \sum b_\varkappa p_\varkappa + \sum c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa \qquad (\iota_1 \varkappa = 1 \ldots n),$$

so läfst sich nur in dem Falle nicht auf das Vorkommen weiterer Transformationen schliefsen, wenn die Transformation hinauskommt auf

$$p_1 x_1 + \ldots + p_\varkappa x_\varkappa \equiv - p_0 x_0$$

oder mit anderen Worten, wenn die Koefficienten $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ sämtlich verschwinden und die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ für irgend zwei ungleiche Marken ι und $\varkappa$ den Bedingungen genügen:

$$(5) \quad c_{\iota\iota} - c_{\varkappa\varkappa} = 0, \; c_{\iota\varkappa} + c_{\varkappa\iota} = 0.$$

Sobald zwischen den Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ diese $n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind, enthält die Gruppe alle Transformationen

$$(6) \quad p_\iota x_\iota - p_\varkappa x_\varkappa, \; p_\iota x_\varkappa \qquad \text{für } \iota \lesseqgtr \varkappa.$$

Sind die Koefficienten $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ nicht sämtlich gleich null, so treten noch die n Transformationen hinzu

$$(7) \quad a_0 p_0 x_\varkappa - b_0 p_\varkappa x_0, \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

wo die Konstanten a_0 und b_0 für alle Marken $\varkappa$ dieselben Werte haben. Damit keine weiteren Transformationen der Gruppe angehören, müssen die Gleichungen bestehen:

$$(8) \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \left(= \frac{a_0}{b_0} \right).$$

Wofern diese Bedingungen nicht erfüllt sind, ist die Gruppe die allgemeine projektive Gruppe mit n (n + 2) von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen.

Um diesen Satz zu erweisen, wähle ich aus den Marken $1 \ldots n$ ein Paar μ, ν aus und kombiniere die Transformation (4) mit $W_{\mu\nu}$. Hierdurch möge ich die neue Transformation T_1 erhalten; diese mit $W_{\mu\nu}$ kombiniert, liefere T_2, und daraus werde auf dieselbe Weise T_3 erhalten. Indem ich T_1 und T_3 addiere, finde ich die Transformation

$$(c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})(p_\mu x_\mu - p_\nu x_\nu) - (c_{\mu\mu} - c_{\nu\nu})(p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu),$$

aus der durch Kombination mit $W_{\mu\nu}$ hervorgeht:

$$(c_{\mu\mu} - c_{\nu\nu})(p_\mu x_\mu - p_\nu x_\nu) + (c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})(p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu).$$

Wenn also die Bedingungen (5) für die Marken μ und ν nicht erfüllt sind, so enthält die Gruppe die Transformationen

$p_\mu x_\mu - p_\nu x_\nu$ und $p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu$ und somit, wie sich aus der Zusammenstellung mit $W_{\mu\nu}$ ergiebt, die Transformationen $p_\mu x_\nu$ und $p_\nu x_\mu$. Indem man diese beiden mit $W_{\mu\varkappa}$ und $W_{\nu\varkappa}$ kombiniert, findet man $p_\mu x_\varkappa$, $p_\varkappa x_\mu$, $p_\nu x_\varkappa$, $p_\varkappa x_\nu$ für jeden Wert von $\varkappa$ $(= 1 \ldots n)$. Kombiniert man diese noch mit $W_{\mu\lambda}$, so wird man auf die Transformationen $p_\varkappa x_\lambda$ geführt. Die Kombination von $p_\varkappa x_\lambda$ und $p_\lambda x_\varkappa$ liefert aber $p_\varkappa x_\varkappa - p_\lambda x_\lambda$. Daher sind alle Transformationen (6) in der Gruppe enthalten, wenn nicht sämtliche Bedingungen (5) erfüllt sind.

Jetzt darf man die Transformation (4) in der Form voraussetzen:

$$p_0 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma b_\varkappa p_\varkappa + c\,(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n).$$

Denn, wofern die Bedingungen (5) allgemein erfüllt sind, kann man die neue Form erhalten, indem man die Transformationen $W_{\iota\varkappa}$ mit geeigneten Koefficienten multipliziert und von (4) subtrahiert. Genügen aber die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ nicht allen Bedingungen (5), so darf man die Transformationen (6) von (4) abziehen und ihr auf diese Weise die vorgeschriebene Form geben.

Die zweimalige Kombination der so gefundenen Transformation mit $W_{\varkappa\lambda}$ führt auf die beiden Transformationen

$$(9) \quad \begin{cases} a_\varkappa p_0 x_\lambda + b_\varkappa x_0 p_\lambda - a_\lambda p_0 x_\varkappa - b_\lambda p_\varkappa x_0 \\ a_\varkappa p_0 x_\varkappa + b_\varkappa x_0 p_\varkappa + a_\lambda p_0 x_\lambda + b_\lambda p_\lambda x_0. \end{cases}$$

Durch Kombination dieser beiden Transformationen mit einander erhalten wir die weitere Transformation:

$$(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa)\,(p_\varkappa x_\varkappa + p_\lambda x_\lambda - 2x_0 p_0) + (a_\varkappa b_\varkappa + a_\lambda b_\lambda)\, W_{\varkappa\lambda}.$$

Wenn hier $a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa$ nicht gleich null ist, so ist in der Gruppe die Transformation

$$p_\varkappa x_\varkappa + p_\lambda x_\lambda - 2x_0 p_0 \text{ oder } p_\varkappa x_\varkappa + p_\lambda x_\lambda + 2\,(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)$$

enthalten, mit der sich nach dem bereits Bewiesenen alle Transformationen $p_\iota x_\varkappa$ für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ vereinigen. Durch die Kombination von $p_\varkappa x_\lambda$ mit (9) gelangt man aber zu $p_0 x_\varkappa$ und $p_\varkappa x_0$.

Sind aber allgemein die Bedingungen (8) erfüllt, so leitet man unmittelbar aus den Transformationen (9) die Transformationen (7) her.

Damit ist der Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

3. Lehrsatz. Wenn für $n = 2$ neben der Transformation

$W = p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0$ bei nicht verschwindendem Werte von l noch eine Transformation

$$T = p_0 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma b_\varkappa x_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2)$$

in einer Gruppe vorkommt, so enthält die Gruppe die Transformationen $p_0 x_1$ und $p_0 x_2$, wofern nicht die Koefficienten a_1 und a_2 beide verschwinden. Ebenso gehören die Transformationen $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ der Gruppe an, wenn einer der Koefficienten b_1 und b_2 von null verschieden ist. Sobald aber sowohl unter den Koefficienten a_1 und a_2 wie unter den Koefficienten b_1 und b_2 einer von null verschieden ist, enthält die Gruppe alle projektiven Transformationen.

Der Beweis wird am einfachsten, wenn in dem Ausdruck T die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ sämtlich verschwinden. In diesem Falle genügt es, T zweimal mit W zu kombinieren. Hierbei möge $T' = (TW)$, $T'' = (T'W)$ sein; die Koefficienten in T' mögen mit einem, die in T'' mit zwei Strichen versehen werden. Dann ist $c_{\iota\varkappa}' = c_{\iota\varkappa} = 0$, und

$$\begin{aligned} a_1' &= -a_2 - l a_1, & a_1'' &= (l^2 - 1) a_1 + 2 l a_2 \\ a_2' &= a_1 - l a_1, & a_2'' &= (l^2 - 1) a_2 - 2 l a_1 \\ b_1' &= -b_2 + l b_1, & b_1'' &= (l^2 - 1) b_1 - 2 l b_2 \\ b_2' &= b_1 + l b_2, & b_2'' &= (l^2 - 1) b_2 + 2 l b_1 . \end{aligned}$$

Jetzt multipliziert man die Form T mit $1 + l^2$, T' mit $2l$ und addiert sie zu T''. Dadurch erhält man bis auf den Faktor $4l$ die Transformation:

$$(-b_2 + l b_1) x_0 p_1 + (b_1 + l b_2) x_0 p_2 ,$$

aus der man durch Kombination mit W eine ähnliche Transformation herleitet. Da die aus den Koefficienten gebildete Determinante nur verschwindet, wenn b_1 und b_2 beide null sind, so enthält die gegebene Gruppe die beiden Transformationen $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$, wofern wenigstens einer der Koefficienten b_1 und b_2 von null verschieden ist. Dasselbe gilt von den Transformationen $p_0 x_1$ und $p_0 x_2$, sobald nicht beide Koefficienten a_1 und a_2 verschwinden.

Wenn jetzt die beiden Ausdrücke $a_1^2 + a_2^2$ und $b_1^2 + b_2^2$ von null verschieden sind, so müssen in der Gruppe die Transformationen $p_0 x_1$, $p_0 x_2$, $x_0 p_1$, $x_0 p_2$ enthalten sein. Von ihnen gelangt man leicht zu den Transformationen $p_1 x_1 - p_0 x_0$, $p_2 x_2 - p_0 x_0$, $x_1 p_2$, $x_2 p_1$. Die Gruppe ist also die allgemeine projektive Gruppe einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Wir müssen den Satz jetzt noch für den Fall beweisen, dafs die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ nicht sämtlich verschwinden. Auch in diesem Falle kombiniert man T wieder mehrmals mit W, bildet also die Transformation $T' = (TW)$, $T'' = (T'W)$, $T''' = (T''W)$. Dabei hangen jedesmal auch die neuen Koefficienten $a_\varkappa$ nur von a_1 und a_2, $b_\varkappa$ nur von b_1 und b_2, $c_{\iota\varkappa}$ nur von c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} ab; die Art der Abhängigkeit für die ersten Koefficienten ist dieselbe, welche vorhin angegeben ist. Addiert man jetzt T' und T''', so erhält man eine Transformation

$T_1 = p_0 \Sigma A_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma B_\varkappa p_\varkappa + e_1(p_1x_1 - p_2x_2) + e_2(p_1x_2 - p_2x_1)$,

worin $e_1 = c_{12} + c_{21}$, $e_2 = c_{22} - c_{11}$ ist, A_1 und A_2 nur beide verschwinden, wenn $a_1 = a_2 = 0$ ist, und entsprechendes für B_1 und B_2 gilt. Auch T_1 wird zweimal mit W kombiniert und die zuletzt erhaltene Transformation zu der mit 4 multiplizierten Form T_1 addiert. Dadurch werden die Koefficienten der $p_\iota x_\varkappa$ (für $\iota, \varkappa = 1, 2$) sämtlich gleich null; dagegen wird der Koefficient von p_0x_1 : $(l^2 + 3) A_1 + 2lA_2$, der von p_0x_1 : $(l^2 + 3) A_2 - 2lA_1$, und die Koefficienten von p_1x_0 und p_2x_0 sind ähnlich. Demnach können auch die Koefficienten von p_0x_1 und p_0x_2 nur gleichzeitig verschwinden, wenn A_1 und A_2 und damit a_1 und a_2 gleichzeitig null sind. Wir sehen also, dafs die Gruppe, falls nicht die vier Koefficienten a_1, a_2, b_1, b_2 verschwinden, eine projektive Transformation enthält, in deren Ausdruck die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ gleich null sind. Es ist also gestattet, diese Transformation statt der gegebenen der weitern Untersuchung zu Grunde zu legen.

4. Nach diesen Vorbereitungen weisen wir folgenden Satz nach:

Soll eine projektive Gruppe, durch welche eine Ebene in sich transformiert wird, im stande sein, eine durch einen festen Punkt gehende Gerade in jede andere durch denselben Punkt gelegte Gerade überzuführen, und sollen zudem nicht alle ihre Transformationen den gewählten Punkt in Ruhe lassen, so hängt sie mindestens von drei Parametern ab; alle dreigliedrigen Gruppen, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, lassen sich entweder durch die drei Transformationen

$$p_1x_2 - p_2x_1, \quad x_0p_1 - kx_1p_0, \quad x_0p_2 - kx_2p_0$$

oder durch

$$p_1x_2 - p_2x_1 + lp_0x_0, \quad x_0p_1, \quad x_0p_2$$

bestimmen.

Indem wir einen in der Funktionentheorie gebräuchlichen Ausdruck benutzen, können wir die aufgestellte Forderung auch in die Worte kleiden: Alle Geraden der Ebene, die in der Umgebung eines festen Punktes liegen, sollen durch die Transformationen der Gruppe in einander übergeführt werden können. Um zu beweisen, dafs die Gruppe von niedrigster Gliederzahl, welche dieser Forderung genügt, auf eine der beiden angegebenen Formen hinauskommt, gebrauchen wir Linienkoordinaten und stellen den festen Punkt durch die Gleichung $u_0 = 0$ dar. Da es möglich sein soll, die Geraden in einander überzuführen, die durch den Punkt $u_0 = 0$ gehen, mufs die Gleichung eine Transformation von der Form

$$(10) \quad u_0 \, (b_0 r_0 + b_1 r_1 \; b_2 r_2) + \Sigma c_{\iota\varkappa} r_\iota u_\varkappa$$

enthalten. Durch Addition der mit einem geeigneten Faktor multiplizierten Form $r_0 u_0 + r_1 u_1 + r_2 u_2$ können wir bewirken, dafs $c_{11} + c_{22} = 0$ wird, und da die Gleichung $(\omega - c_{11})(\omega - c_{22}) - c_{12} c_{21} = 0$ keine reelle Wurzel besitzen soll, mufs die Determinante $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$ positiv sein; sie kann also, da man alle Koefficienten in (10) mit demselben Faktor multiplizieren darf, gleich eins gemacht werden. Ersetzt man jetzt u_1 durch $c_{12} u_1$, u_2 durch $u_2 - c_{11} u_1$, und demnach r_1 durch $r_1 + c_{11} r_2$, r_2 durch $c_{12} r_2$, so geht die Transformation (10) über in

$$u_0 \, (b_0 r_0 + b_1 r_1 + b_2 r_2) + r_1 u_2 - r_2 a_1,$$

wo allerdings die Koefficienten b nicht mehr die früheren Werte zu besitzen brauchen. Hier darf man u_0 ungeändert lassen, u_1 durch $u_1 + \alpha u_0$, u_2 durch $u_2 + \beta u_0$ ersetzen, wofern man noch r_1 und r_2 beibehält und r_0 mit $r_0 - \alpha r_1 - \beta r_2$ vertauscht. Dann kann man α und β so bestimmen, dafs die vorstehende Transformation die Form annimmt:

$$r_1 u_2 - r_2 u_1 - l u_0 r_0.$$

Indem wir jetzt von den Linienkoordinaten zu Punktkoordinaten übergehen, sehen wir, dafs die Gruppe die Transformation enthält:

$$(11) \quad p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0.$$

Da die Gruppe den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in andere Lagen überführen soll, mufs sie eine Transformation von der Form (4) enthalten, worin die Koefficienten b_1 und b_2 nicht beide gleich null sind. Auf die neue Transformation wende man die in den

beiden letzten Paragraphen bewiesenen Sätze an. Dann folgt aus 2. für $l = 0$, dafs zu der Transformation (11) mindestens die Transformationen

$$p_1 x_0 - k p_0 x_1 \text{ und } p_2 x_0 - k p_0 x_2$$

hinzukommen, während der unter 3. bewiesene Satz uns zeigt, dafs die Gruppe mindestens noch die Transformationen $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ enthalten mufs. (Für einen verschwindenden Wert von l beachte man hierbei, dafs der in 2. benutzte Koefficient b_0 nicht gleich null sein kann; man darf ihn also durch eins und a_0 durch $-k$ ersetzen.)

5. Lehrsatz. Wenn durch die Transformationen einer Gruppe alle Geraden der Ebene in einander übergeführt werden können, so wird die Gruppe entweder bei passender Wahl der Veränderlichen durch die drei Transformationen

$$p_1 x_2 - p_2 x_1,\; p_0 x_1 - p_1 x_0,\; p_0 x_2 - p_2 x_0$$

bestimmt, oder sie ist die allgemeine projektive Gruppe in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Wie wir in der vorigen Nummer gesehen haben, kann eine infinitesimale Transformation der Gruppe auf die Form gebracht werden:

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0.$$

Zudem mufs die Gruppe mindestens eine Transformation von der Form (4) enthalten, worin die Koefficienten b_1 und b_2 nicht beide verschwinden. Wenn hier l von null verschieden ist, so entlehnen wir der Nummer 3 den Satz, dafs die Gruppe entweder noch die Transformationen $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ oder aufser diesen beiden noch die Transformation $p_0 x_0$ oder endlich alle projektiven Transformationen enthält. Sie ist also entweder dreigliedrig und wird durch die Transformationen

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0,\; p_1 x_0,\; p_2 x_0$$

bestimmt; oder sie ist viergliedrig und enthält die Transformationen $p_1 x_2 - p_2 x_1$, $p_0 x_0$, $p_1 x_0$, $p_2 x_0$, oder sie ist die allgemeine projektive Gruppe mit acht willkürlichen Parametern. Die beiden ersten Fälle müssen aber ausgeschlossen werden, weil dann die Ebene $x_0 = 0$ durch die Transformationen der Gruppe keine Veränderung erleidet.

Für einen verschwindenden Wert von l wenden wir den in 2. bewiesenen Satz an, nach welchem entweder die Transformationen

$p_1x_0 - kp_0x_1$ und $p_2x_0 - kp_0x_2$ hinzukommen oder die Gruppe durch die vier Transformationen $p_1x_2 - p_2x_1$, p_1x_0, p_2x_0, p_0x_0 bestimmt wird oder drittens die allgemeine projektive Gruppe ist. Der zweite Fall ist bereits soeben erledigt. Wird im ersten Falle $k = 0$, so bleibt die Gerade $x_0 = 0$ bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert. Für einen nicht verschwindenden Wert von k transformiert die zuerst angegebene Gruppe den Kegelschnitt

$$\frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

nur in sich. Die Tangenten dieses Kegelschnitts müssen daher auch in jeder durch die Transformationen der Gruppe erhaltenen neuen Lage wieder diesen Kegelschnitt berühren. Damit diese geraden Linien, deren Beweglichkeit eine beschränkte ist, imaginär werden, mufs der Koefficient k positiv sein. Dann kann man aber durch eine leichte Änderung von x_0 bewirken, dafs dieser Koefficient gleich eins wird. Es bleiben also nur die beiden im Lehrsatz angegebenen Möglichkeiten.

6. Aus dem vorstehenden Satze folgt unmittelbar der folgende:

Eine projektive Gruppe des Raumes, deren Transformationen im stande sind, alle durch einen festgewählten Punkt gehenden Ebenen in einander überzuführen, enthält drei unendlich kleine Transformationen, die man bei passender Wahl der Koordinaten in der Form schreiben kann:

$$p_2x_3 - p_3x_2,\ p_3x_1 - p_1x_3,\ p_1x_2 - p_2x_1.$$

Man kann noch hinzufügen, dafs die Gruppe entweder diese drei Transformationen oder für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ die sämtlichen Transformationen $p_\iota x_\varkappa$ und $p_\iota x_\iota - p_\varkappa x_\varkappa$ enthält.

Statt diesen Satz auf den vorangehenden zurückzuführen, kann man ihn ebenso leicht direkt beweisen; dabei vermeidet man es, den Raum als Ganzes des Untersuchung zu Grunde zu legen.

7. Hiernach ist es sehr leicht, folgenden Satz zu erhärten:

Die niedrigste projektive Gruppe des Raumes, die geeignet ist, alle in der Umgebung eines festen Punktes liegenden Ebenen in einander überzuführen, ist sechsgliedrig; die sechs sie bestimmenden Transformationen können in der Form geschrieben werden:

$$(13)\quad p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota,\ p_\varkappa x_0 - kp_0x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

wo der Konstanten k jeder endliche reelle Wert beigelegt werden kann.

Aus der Forderung, dafs alle durch den festen Punkt gelegten Ebenen in einander übergeführt werden können, ergiebt sich, indem man die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durch diesen Punkt gehen läfst, dafs die Gruppe die drei an erster Stelle genannten Transformationen enthält. Es sollen aber diese Ebenen durch die Transformationen der Gruppe auch solche Lagen erhalten, bei denen sie nicht mehr durch den Punkt (1, 0, 0, 0) hindurchgehen. Daher mufs der Gruppe mindestens eine Transformation von der Form (4) angehören, worin die Koefficienten b_1, b_2, b_3 nicht sämtlich gleich null sind. Wie wir unter 2. nachgewiesen haben, mufs die Gruppe mindestens noch die drei Transformationen (7) enthalten, und hierin kann, da die Konstante b_0 von null verschieden ist, $b_0 = 1$, $a_0 = -k$ gesetzt werden.

8. Jetzt bestimmen wir eine projektive Gruppe des Raumes durch die beiden Festsetzungen:

a) Die Transformationen der Gruppe sollen im stande sein, alle in der Umgebung eines festen Punktes gelegenen Ebenen in einander überzuführen;

b) unter allen dieser Bedingung genügenden Gruppen soll die auszuwählende eine möglichst kleine Gliederzahl haben.

Jede derartige Gruppe ist sechsgliedrig und kann in der Form (13) dargestellt werden, wo die Konstante k noch jeden reellen Wert erhalten kann. Jetzt beschränken wir uns nur auf Transformationen, welche dieser Gruppe angehören.

Eine stetige Folge ihrer Transformationen soll eine starre Bewegung genannt werden. (Die Hinzunahme des Wortes »starr« dürfte notwendig sein, da das Wort Bewegung auch bei beliebigen Transformationen nicht gut entbehrt werden kann.) Zwei Gebilde heifsen kongruent, wenn sie durch eine starre Bewegung in einander übergeführt werden können; mit anderen Worten: Beschränken wir die Variabeln (x) auf diejenigen Wertsysteme, die zu den Punkten eines gewissen Gebildes gehören, führen wir dann diese Variabeln durch eine der Gruppe angehörende Transformation in die Variabeln (y) über, so bestimmt die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Wertsysteme (y) die Punkte eines neuen Gebildes, das zu dem ersten kongruent ist. Die Fläche, auf der bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter noch bewegt werden kann, heifst eine Kugel. Von zwei Punktepaaren, die

mit einander zur Deckung gebracht werden können, sagen wir, sie hätten gleichen Abstand. Um noch die Messung des Abstandes zu ermöglichen, setzen wir fest, dafs der Abstand AC gleich der Summe der Abstände AB und BC sein soll, wenn der Punkt B auf der Geraden AC zwischen den Punkten A und C liegt. Diese Festsetzung kommt auf die folgende hinaus: Wenn eine infinitesimale Transformation

$$(14) \quad dx_\alpha = dt \sum_\beta A_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1 \ldots n)$$

eine Gerade in sich verschiebt, so mufs die unendlich kleine Strecke, welche von einem Punkte dieser Geraden beschrieben wird, der Gröfse dt proportional sein; und wenn man die Veränderungen durch die Variabele t ausdrückt, so ist auch diese Gröfse der von jedem einzelnen Punkte der Geraden beschriebenen Länge proportional.

In entsprechender Weise wird man sagen, zwei zusammenstofsende Linien a_1 und a_2 bildeten denselben Winkel wie die Geraden b_1 und b_2, wenn das Geradenpaar (a_1, a_2) zur Deckung mit dem Paare (b_1, b_2) gebracht werden kann. Daraus folgt wieder, dafs in einer infinitesimalen Transformation von der Form (14), die einen Punkt O in Ruhe läfst und eine durch ihn gelegte Ebene in sich verschiebt, die Gröfse dt dem unendlich kleinen Winkel proportional gesetzt werden mufs, den eine in der Ebene von O ausgehende Gerade bei dieser Bewegung beschreibt.

Hiernach ist es möglich, die Grundbegriffe der metrischen Geometrie auf Begriffe zurückzuführen, welche einen rein projektiven Charakter haben. Da für diese Begriffe aber diejenigen Voraussetzungen gelten, von denen die Metrik ausgeht, so mufs man von ihnen aus auch zu denselben Ergebnissen gelangen.

9. Indessen ist es weit leichter, dies direkt aus den Sätzen der Projektivität herzuleiten. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob der Koefficient k verschwindet oder gröfser oder kleiner als null ist.

Für $k = 0$ ist auch dx_0 stets gleich null; es ist also gestattet, $x_0 = 1$ zu setzen. Die aus der infinitesimalen Transformation $x_0 p_1$ hervorgehende eingliedrige Gruppe läfst die Koordinaten x_2 und x_3 ungeändert und verändert alle x_1 um dieselbe Gröfse t.

Alle Punkte bewegen sich in geraden Linien und legen darin gleiche Strecken zurück. Dasselbe gilt von den Transformationen, welche bei beliebigem Werte von t durch die Gleichungen angegeben werden:

$$y_1 = x_1 + a_1 t,\ y_2 = x_2 + a_2 t,\ y_3 = x_3 + a_3 t.$$

Aus der infinitesimalen Transformation $p_2 x_3 - p_3 x_2$ ergiebt sich durch einfache Integration:

$$y_2 = x_2 \cos t + x_3 \sin t,\ y_3 = -x_2 \sin t + x_3 \cos t,\ y_1 = x_1.$$

Hierbei wird jeder Punkt der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ in Ruhe bleiben und jede Ebene $x_1 = c$ für einen beliebigen Wert von c in sich verschoben. Beschränken wir die Variabeln (x) auf die Punkte einer Geraden, die von einem Punkte der Linie $x_2 = x_3 = 0$ ausgeht und in der Ebene $x_1 = c$ liegt, so werden die entsprechenden Werte (y) ebenfalls zu den Punkten einer derartigen Geraden gehören; die Gröfse t giebt den Winkel zwischen der ersten und zweiten Geraden an. Hieraus erkennen wir, indem wir $t = \frac{\pi}{2}$ setzen, dafs die Schnittlinien einer solchen Ebene $x_1 = c$ mit den beiden Ebenen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ auf einander senkrecht stehen. Speciell bilden irgend zwei Koordinatenachsen rechte Winkel mit einander, und da die Ebene $x_1 = c$ bei der Ruhe der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ in sich verschoben wird, so steht die x_1-achse auf allen Geraden senkrecht, die in der Ebene $x_1 = c$ durch ihren Schnittpunkt mit der Achse gezogen werden können. Um daher den Wert von x_1 für irgend einen Punkt zu bestimmen, lege man durch ihn eine Ebene, welche auf der x_1-achse senkrecht steht, und messe das Stück, welches hierdurch vom Anfangspunkte an ausgeschnitten wird. Ebenso bestimmt man die Werte der anderen Koordinaten.

Mit der Ebene $x_1 = 0$ werden auch alle Ebenen $x_1 = c_1$ in sich verschoben. Hierbei kann man der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ jede Lage $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$ für beliebige Werte c_2 und c_3 geben. Folglich steht auch die letztere Gerade auf allen Ebenen $x_1 = c_1$ senkrecht. Hiernach können die Koordinaten auch definiert werden als die Längen der Senkrechten, die von dem zu bestimmenden Punkte auf die Koordinaten-Ebenen gefällt werden.

Durch die letzte Betrachtung ist die Existenz eines Rechtecks als eines Vierecks mit lauter rechten Winkeln bewiesen; hieraus

läfst sich leicht herleiten, dafs die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte beträgt. Wir sehen also, dafs der hier skizzierte Weg für $k = 0$ zur parabolischen Geometrie führt.

10. In ähnlicher Weise kann man für einen von null verschiedenen Wert von k verfahren; indessen ziehen wir es vor, einen etwas abweichenden Weg einzuschlagen.

Da sich der Ausdruck

$$\frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

bei keiner Transformation der Gruppe ändert, so setze man ihn gleich $\frac{1}{k}$, wodurch man erreicht, dafs der Anfangspunkt die Koordinaten (1, 0, 0, 0) bekommt. Zugleich bleibt für irgend zwei Punkte (x) und (x') der Ausdruck

$$\frac{x_0 x_0'}{k} + x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'$$

bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert; er stellt also für alle Punktepaare dieselbe Funktion des Abstandes dar. Um diese Funktion zu bestimmen, betrachte man die Verschiebung der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ in sich, oder mit anderen Worten, man löse das durch das Symbol $x_0 p_1 - k x_1 p_0$ vertretene System von Differentialgleichungen:

$$dx_1 = x_0 dt, \quad dx_0 = - k x_1 dt.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x_1 = a \cos (t\sqrt{k}) + b \sin (t\sqrt{k}),$$
$$x_0 = - a\sqrt{k} \sin (t\sqrt{k}) + b\sqrt{k} \cos (t\sqrt{k}),$$

wo a und b willkürliche Konstanten sind. Um die Länge der Strecke zu bestimmen, welche der Anfangspunkt (1, 0, 0, 0) hierbei beschreibt, mufs für $t = 0$ sein $x_1 = 0$, $x_0 = 1$. Danach wird $x_0 = \cos t\sqrt{k}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin (t\sqrt{k})$. Setzt man also in dem obigen Ausdruck für (x') das Wertsystem (1, 0, 0, 0) und für (x) das System $(\cos [t\sqrt{k}], \frac{1}{\sqrt{k}} \sin [t\sqrt{k}], 0, 0)$ ein, so folgt allgemein:

$$(15) \quad \frac{x_0 x_0'}{k} + x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' = \frac{1}{k} \cos (e\sqrt{k}),$$

wo e den Abstand der beiden Punkte bezeichnet.

Beiläufig folgt hieraus, dafs für jeden Punkt die Koordinate x_0 gleich ist $\cos(e\sqrt{k})$, wo der Abstand des zu bestimmenden Punktes vom Anfangspunkte gleich e gesetzt ist.

In entsprechender Weise darf man zwischen den Koordinaten u_0, u_1, u_2, u_3 einer Ebene die Beziehung

$$ku_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

festsetzen, so dafs die drei Koordinaten-Ebenen zu den Wertsystemen (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) gehören. Dann wird der Winkel φ der beiden Ebenen (u) und (u') durch die Gleichung

$$ku_0u_0' + u_1u_1' + u_2u_2' + u_3u_3' = \cos\varphi$$

bestimmt. Die Koordinaten u_1, u_2, u_3 einer Ebene geben also den Kosinus der Winkel an, unter denen sie von den einzelnen Koordinaten-Ebenen geschnitten wird.

Hieraus ergiebt sich ferner der Satz: Wenn zwei sich schneidende Ebenen auf derselben dritten Ebene senkrecht stehen, so bildet auch jede durch die Schnittlinie gelegte Ebene mit der dritten gleiche Winkel. In entsprechender Weise folgt, dafs jede Koordinaten-Achse auf allen Geraden senkrecht steht, die in der die Achse nicht enthaltenden Koordinaten-Ebene durch den Anfangspunkt gezogen werden.

Da der Ausdruck

$$x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

für alle Transformationen der Gruppe unverändert bleibt, so stellt er eine feste Beziehung des Punktes (x) zur Ebene (u) dar. Wählt man speciell $u_0 = u_2 = u_3 = 0$, $u_1 = 1$, und $x_2 = x_3 = 0$, so geht der Ausdruck in $x_1 = \frac{\sin(e\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$ über, wo e den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene darstellt. Somit ist allgemein:

$$x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \frac{\sin(e\sqrt{k})}{\sqrt{k}},$$

wenn der senkrechte Abstand des Punktes (4) von der Ebene (u) gleich e gesetzt wird. Wählt man zur Ebene (u) der Reihe nach eine der Koordinaten-Ebenen, so erhält man die Bedeutung von x_1, x_2, x_3; dagegen findet man die Bedeutung von u_0, wenn man für den Punkt (x) den Anfangspunkt (1, 0, 0, 0) nimmt.

Um die trigonometrischen Formeln für ein rechtwinkliges Dreieck zu erhalten, kann man die Formeln benutzen, nach denen

eine Koordinaten-Ebene bei der Ruhe des Anfangspunktes in sich verschoben wird. Auch liefert die Formel (15) eine Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn man die Punkte (x) und (x') auf verschiedenen Koordinaten-Achsen wählt. Aus den so gewonnenen Formeln kann man die Trigonometrie vollständig herleiten.

Wir sind somit wieder zu den Raumformen gelangt, die wir im ersten Abschnitt (B. 1. S. 19 – 89) hergeleitet haben. Um auch im Äufsern volle Übereinstimmung herbeizuführen, hat man die hier benutzte Gröfse k nach ihrem Vorzeichen durch $\frac{1}{k^2}$ oder durch $-\frac{1}{k^2}$ zu ersetzen.

11. In dem Falle, dafs die Konstante k von null verschieden ist, kann man den Abstand zweier Punkte und den Winkel zweier Ebenen auch in einer Weise einführen, welche den Vorzug hat, dafs sie von den Transformations-Gruppen nur geringen Gebrauch macht und direkt an die Grundlagen der projektiven Geometrie anknüpft, aber insofern hinter dem skizzierten Wege zurücksteht, als sie uneigentliche und sogar imaginäre Wertsysteme benutzt und sich dadurch von einem rein geometrischen Standpunkt entfernt. Zwar ist dieser Weg im wesentlichen bereits im ersten Bande (S. 151—155) angegeben; der veränderte Ausgangspunkt nötigt uns aber, ihn nochmals zu besprechen.

Die sämtlichen Transformationen unserer Gruppe lassen die Form

$$\frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ungeändert; umgekehrt ist unsere Gruppe durch die Forderung, diese Form nicht zu ändern, eindeutig bestimmt. Demnach gehen die Wertsysteme (x), welche der Gleichung:

$$(16) \quad \frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

genügen, nur in solche Wertsysteme über, für welche diese Gleichung gültig bleibt. Wir sagen daher, alle diese Wertsysteme gehören dem unendlich fernen Gebilde an.

Sind (x') und (x'') die Koordinaten zweier (eigentlicher)

Punkte, so suche man diejenigen Werte von λ, welche der Gleichung genügen:

$$(17)\quad \frac{(x_0'+\lambda x_0'')^2}{k} + (x_1'+\lambda x_1'')^2 + (x_2'+\lambda x_2'')^2 + (x_3'+\lambda x_3'')^2 = 0.$$

Das Wertsystem y, welches für einen dieser beiden Werte von λ den Gleichungen genügt:

$$\varrho y_\alpha = x_\alpha' + \lambda x_\alpha'' \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

befriedigt erstens die Gleichung (16) und zweitens die Gleichungen sämtlicher Ebenen, welche durch die Punkte (x') und (x'') gelegt werden können; im uneigentlichen Sinne dürfen wir also sagen, jedes solche Wertsystem stelle einen Schnittpunkt der durch (x') und (x'') gelegten Geraden mit dem unendlich fernen Gebilde dar. Sind (x'), (x''), $(x' + \lambda_1 x'')$, $(x' + \lambda_2 x'')$ die Koordinaten von vier eigentlichen Punkten, so giebt der Quotient $\lambda_1 : \lambda_2$ den Wert des Doppelverhältnisses der vier Punkte an; ebenso soll jetzt, wenn λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung (17) sind, dieser Quotient als das Doppelverhältnis der Punkte (x') und (x'') zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit der unendlich fernen Fläche bezeichnet werden. Diese Gröfse $\lambda_1 : \lambda_2$ bleibt aber bei allen Transformationen ungeändert, welche unserer Gruppe angehören; wir bringen sie daher in Zusammenhang mit dem Abstand der beiden Punkte. Da bei der Vertauschung der Punkte (x') und (x'') das Doppelverhältnis seinen reciproken Wert annimmt, der Abstand aber nur sein Zeichen ändern soll, so setzen wir den Abstand A unter Einführung einer festen Konstante c gleich

$$A = c.ln\,(\lambda_1 : \lambda_2);$$

speciell möge $c = \frac{1}{2i\sqrt{k}}$ angenommen werden.

Ebenso verfährt man mit zwei Ebenen (u') und (u''), die sich in einer Geraden schneiden. Man legt durch die Schnittlinie die beiden Tangentialebenen an die unendlich ferne Fläche, d. h. man bestimmt die beiden Werte μ_1 und μ_2 von μ, welche für $v_\alpha = u_\alpha' + \mu u_\alpha''$ der Gleichung genügen:

$$kv_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Ebenen ist gleich $\mu_1 : \mu_2$ und definiert den Winkel φ der beiden Ebenen durch die Gleichung

$$\varphi = c.ln\,(\mu_1 : \mu_2),$$

wo speciell $c = \frac{1}{2i}$ gesetzt werden kann.

§ 5.

Projektivität und Bewegung. Elementare Entwicklung.

1. Schon in II § 7—9 (B. 1. S. 128—149) ist unter Benutzung der projektiven Eigenschaften des Raumes nachgewiesen worden, dafs man den Sätzen der Metrik auf drei verschiedene Weisen genügen kann, und dafs man somit auch von der Projektivität aus zu den nichteuklidischen Raumformen gelangt. Der Weg, der dort in § 8 eingeschlagen wurde, ist aber, wie ich ausdrücklich hervorgehoben habe, recht lästig. Nun habe ich gesehen, dafs an dem mitgeteilten Beweise nur leichte Änderungen angebracht zu werden brauchen, um ihn ganz einfach und übersichtlich zu machen. Indem ich also den Inhalt von II § 7 als bekannt voraussetze, will ich die weitere Herleitung in voller Ausführlichkeit hersetzen.

Beim Beweise benutzen wir folgende Sätze:

a) Wenn eine Ebene um einen ihrer Punkte in sich gedreht wird, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine geschlossene Linie, einen Kreis.

b) Verschiebt man einen Kreis längs eines Durchmessers, bis der eine Endpunkt auf den andern zu liegen kommt, so fällt auch die Tangente des ersten Punktes auf die des zweiten.

c) Von allen Tangenten eines Kreises schneidet ein konzentrischer Kreis, der den ersten umschliefst, vom Berührungspunkte aus gleiche Stücke ab.

Von diesen drei Sätzen wird der erste bei der Definition des Kreises vorausgesetzt; die beiden anderen folgen leicht aus den Kongruenzsätzen.

2. Wir denken eine Ebene um einen ihrer Punkte in sich gedreht. Indem wir den ruhenden Punkt zum Anfangspunkte des Koordinatensystems wählen, wird diejenige Lage (x', y'), welche irgend ein Punkt (x, y) durch die Bewegung erhält, bei konstanten Werten von α, β, γ, α', β', α'', β'' durch die Gleichungen bestimmt:

$$(1)\quad x' = \frac{\alpha' x + \beta' y}{\alpha x + \beta y + \gamma},\quad y' = \frac{\alpha'' x + \beta'' y}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Wenn die Gerade $x = uy$ durch diese Bewegung in die Lage $x' = u'y'$ gebracht wird, so besteht zwischen den Gröſsen u' und u die Gleichung:

$$(2) \quad u' = \frac{\alpha' u + \beta'}{\alpha'' u + \beta''}.$$

Durch eine Gleichung von derselben Form wurde in II § 7 die Veränderung angegeben, welche die Bestimmungsgröſse eines Punktes erleidet, wenn eine Gerade in sich verschoben wird. Da aber bei der Fortsetzung der Drehung jede durch den ruhenden Punkt gelegte Gerade in ihre Anfangslage zurückkehrt, muſs die Transformation (2) elliptisch sein. Wir können daher durch eine einfache Umänderung von u und u' erreichen, daſs $\alpha' = \beta'' = \sigma$, $\alpha'' = -\beta' = \tau$ wird. Dieselbe Umänderung dürfen wir mit den Werten von x und y, x' und y' vornehmen und können demnach, weil γ offenbar von null verschieden ist, die Gleichungen (1) durch die folgenden ersetzen:

$$(3) \quad x' = \frac{\sigma x - \tau y}{\alpha x + \beta y + 1}, \quad y' = \frac{\tau x + \sigma y}{\alpha x + \beta y + 1}.$$

Jetzt suchen wir eine lineare Form $Ax + By + C$, welche durch die Transformation (3) nur mit einem gewissen Faktor multipliziert wird, so daſs mit der Gleichung

$Ax + By + C = 0$ auch die Gleichung $Ax' + By' + C = 0$

verbunden ist. Mit anderen Worten: Wir fragen uns, ob im idealen Teile des Raumes eine Gerade liegt, welche bei der Drehung in sich verschoben wird. Zur Bestimmung der Gröſsen A, B, C dienen die Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} A\sigma + B\tau + C\alpha &= A \\ -A\tau + B\sigma + C\beta &= B, \end{aligned}$$

aus denen sich nur ein einziges reelles System dieser Verhältnisse ergiebt. Indem wir jetzt setzen:

$$(5) \quad \xi = \frac{x}{Ax + By + C}, \quad y = \frac{y}{Ax + By + C},$$

folgt entsprechend:

$$\xi' = \frac{x'}{Ax' + By' + C} = \frac{\sigma x - \tau y}{(A\sigma + B\tau + Cx) + (-A\tau + B\sigma + C\beta)y + C}.$$

Unter Berücksichtigung von (4) geht diese Gleichung und die entsprechende für η über in:

$$\xi' = \sigma\xi - \tau\eta, \quad \eta' = \tau\xi + \sigma\eta.$$

Hier ersetze ich σ durch $\varrho \cos \lambda$, τ durch $\varrho \sin \lambda$ und denke mir die Bewegung wie in II § 7 unbegrenzt fortgesetzt. Dann mufs der Punkt in seine Anfangslage zurückkehren; es mufs also für gewisse Werte von ϱ und λ werden $x' = x$, $y' = y$ und damit auch $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$. Das ist nur möglich für $\varrho = 1$, $\lambda = 2m\pi$ bei einem ganzzahligen Werte von m. Da aber bei der Wiederholung der Bewegung ϱ mit einem Exponenten, λ nur mit einem Faktor versehen wird, so sind die Transformations-Gleichungen in den neuen Gröfsen:

(6) $\xi' = \xi \cos \lambda - \eta \sin \lambda, \quad \eta' = \xi \sin \lambda + \eta \cos \lambda.$

Zugleich wird die Gleichung eines jeden Kreises, der den Anfangspunkt zum Mittelpunkt hat:

$$(7) \quad \xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

Mit diesem Kreise hat die Gerade $\xi = a$ nur den Punkt (a, 0) gemeinschaftlich; sie ist Tangente an ihn. Derselbe Kreis wird von der Geraden $\xi = -a$ berührt.

3. Da die Gröfsen ξ und η gebrochene lineare Funktionen von x und y sind, welche denselben Nenner haben, so werden auch in ihnen die projektiven Umgestaltungen durch gebrochene lineare Funktionen dargestellt. Verschieben wir die Ebene längs der Achse $\eta=0$, so hat die Gleichung, durch welche die Veränderung von ξ in dieser Geraden angegeben wird, entweder die Form:

$$\frac{\xi' - \alpha}{\xi' - \beta} = \varrho \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta} \text{ oder } \frac{\xi' - \alpha}{\beta} = \frac{(\xi - \alpha) \cos \varrho - \beta \sin \varrho}{(\xi - \alpha) \sin \varrho + \beta \cos \varrho}$$

$$\text{oder } \frac{1}{\xi' - \alpha} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \varrho,$$

wo α und β feste Werte, ϱ ein beliebiger Wert beizulegen ist; im ersten Fall kann die Form auch sein: $\xi' - \alpha = \varrho (\xi - \alpha)$, im letzten auch: $\xi' = \xi + \varrho$.

Nun beachten wir, dafs der Kreis (7) die Gerade $\eta = 0$ in den beiden Punkten: $\xi = \pm a$ schneidet. Verschiebt man also diese Gerade in sich, bis der Punkt (— a, 0) auf den Punkt (0, 0) zu liegen kommt, so deckt gleichzeitig der Nullpunkt den Punkt (a, 0). In einer parabolischen Ebene, die wir zunächst betrachten, mufs also eine der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\xi' - \alpha} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \varrho \text{ und } \xi' = \xi + \varrho$$

bei demselben Werte von ϱ sowohl für $\xi = -\mathrm{a}$, $\xi' = 0$ als auch für $\xi = 0$, $\xi' = \mathrm{a}$ erfüllt sein. Diese Forderung verlangt, dafs die Gleichung ist: $\xi' = \xi + \varrho$.

Nun mufs die Verschiebung einer Ebene längs einer ihrer Geraden durch Gleichungen von der Form:

$$(8) \quad \xi' = \frac{\varkappa'\xi + \lambda'\eta + \mu'}{\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu}, \quad \eta' = \frac{\varkappa''\xi + \lambda''\eta + \mu''}{\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu}$$

dargestellt werden. Soll darin für $\eta = 0$ auch $\eta' = 0$, $\xi' = \xi + \varrho$ sein, so folgt $\varkappa' = \mu = 1$, $\varkappa = 0$, $\mu' = \varrho$, $\varkappa'' = \mu'' = 0$.

Ein um den Anfangspunkt beschriebener Kreis, der den Kreis (7) umschliefst, schneidet auf den Geraden $\xi = +\mathrm{a}$ und $\xi = -\mathrm{a}$ vom Berührungspunkte aus gleiche Strecken ab. Da aber für die Schnittpunkte auf beiden Geraden sich gleiche Werte von η ergeben, so gehören auf diesen beiden Geraden zu gleichen Werten von η auch gleiche Strecken. Verschiebt man also die Ebene längs der Geraden $\eta = 0$, bis der Punkt $(-\mathrm{a}, 0)$ den Punkt $(\mathrm{a}, 0)$ deckt, so mufs wegen des oben angeführten Satzes b) auch die Gerade $\xi = -\mathrm{a}$ auf die Gerade $\xi = \mathrm{a}$ zu liegen kommen, und für diese beiden Geraden mufs der Wert von η ungeändert bleiben. Demnach müssen sich die weiteren Konstanten in (8) so bestimmen lassen, dafs für $\xi = -\mathrm{a}$ wird $\xi' = \mathrm{a}$, $\eta' = \eta$. Da hierbei der Wert von a noch beliebig ist, nehmen die Transformations-Gleichungen die Form an:

$$(9) \quad \xi' = \xi + \varrho, \; \eta' = \eta.$$

Ebenso wird die Verschiebung längs der Geraden $\xi = 0$ in einer solchen Ebene durch die Gleichungen bestimmt:

$$(10) \quad \xi' = \xi, \; \eta' = \eta + \varrho.$$

4. In einer hyperbolischen Ebene müssen, weil die Verschiebung der Geraden $\eta = 0$ in sich den Punkt $(-\mathrm{a}, 0)$ in den Nullpunkt und zugleich den Punkt $(0, 0)$ nach $(\mathrm{a}, 0)$ überführt, für jeden Wert von a bei passender Wahl von ϱ die Gleichungen erfüllt sein:

$$\frac{-\alpha}{-\beta} = \varrho \, \frac{-\mathrm{a} - \alpha}{-\mathrm{a} - \beta}, \quad \frac{\mathrm{a} - \alpha}{\mathrm{a} - \beta} = \varrho \, \frac{-\alpha}{-\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{a}^2 - \alpha^2}{\mathrm{a}^2 - \beta^2}.$$

Diese Gleichung verlangt $\alpha^2 = \beta^2$ oder $\alpha = -\beta = \mathrm{l}$. Dadurch gelangen wir zu der Gleichung:

$$\frac{\xi'}{\mathrm{l}} = \frac{\sigma\xi + \mathrm{l}}{\xi + \sigma\mathrm{l}},$$

wo wir $\sigma = \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ gesetzt haben. Verbindet man mit dieser Gleichung $\eta' = \eta = 0$, so müssen darin die Gleichungen (8) für $\eta = 0$ übergehen; man mufs demnach setzen: $\varkappa'' = \mu'' = 0$, $\varkappa' = \mu = \sigma l$, $\varkappa = 1$, $\mu' = l^2$.

Nun mufs aus demselben Grunde, den wir eben für die parabolische Ebene entwickelt haben, für $\xi = -a$, $\xi' = a$, auch $\eta' = \eta$ erhalten werden, wo der Wert von a noch veränderlich ist. Dadurch gehen die Gleichungen (8) über in:

$$\xi' = \frac{(l^2+a^2)\,\xi + 2al^2}{2a\xi + (l^2+a^2)},\quad \eta' = \frac{(l^2-a^2)\,\eta}{2a\xi + (l^2+a^2)}.$$

Setze ich noch

$$\frac{2al}{l^2-a^2} = \operatorname{Sh}\frac{\mu}{l},\ \text{also}\ \frac{l^2+a^2}{l^2-a^2} = \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l},$$

so werden diese Gleichungen:

$$\xi' = \frac{\xi \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l} + l\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l}}{\frac{\xi}{l}\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l} + \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l}},\quad \eta' = \frac{\eta}{\frac{\xi}{l}\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l} + \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l}}.$$

Jetzt bestimme ich drei Gröfsen p, u, v durch die Forderungen:

$$\frac{u}{p} = \xi,\ \frac{v}{p} = \eta,\ l^2p^2 - u^2 - v^2 = l^2,\ p = 1 \text{ für } \xi = \eta = 0.$$

Indem ich p', u', v' in gleicher Weise von ξ', η' abhängen lasse, finde ich die Gleichungen:

$$(11)\quad p' = p\operatorname{Ch}\frac{\mu}{l} + \frac{u}{l}\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l},\ u' = pl\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l} + u\operatorname{Ch}\frac{\mu}{l},\ v' = v,$$

durch welche die Verschiebung längs der Geraden $\eta = 0$ oder $v = 0$ angegeben wird.

In entsprechender Weise gelten für die Verschiebung längs der Geraden $v = 0$ die Gleichungen:

$$(12)\quad p' = p\operatorname{Ch}\frac{\nu}{l} + \frac{v}{l}\operatorname{Sh}\frac{\nu}{l},\ u' = u,\ v' = pl\operatorname{Sh}\frac{\nu}{l} + v\operatorname{Ch}\frac{\nu}{l}.$$

Die Gleichungen (6) gehen über in:

$$(13)\quad p' = p,\ u' = u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ v' = u\sin\alpha + v\cos\alpha.$$

5. Da der Weg, den man für die Untersuchung einer elliptischen Ebene einschlagen mufs, derselbe ist wie der, welcher in

den beiden anderen Ebenen uns zum Ziel geführt hat, die Rechnung sich aber noch einfacher gestaltet, so genügt es, das Resultat anzugeben.

Wir führen drei Gröfsen p, u, v ein durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{u}{p},\ \eta = \frac{v}{p},\ k^2p^2 + u^2 + v^2 = k^2,\ p = 1 \text{ für } \xi = \eta = 0,$$

und durch die Festsetzung, dafs bei stetiger Änderung von ξ und η auch die Gröfsen p, u, v sich stetig ändern sollen. Dann werden die Transformationsgleichungen für die Drehung um den Anfangspunkt:

(14) $p' = p,\ u' = u \cos\alpha - v \sin\alpha,\ v' = u \sin\alpha + v \cos\alpha,$

für die Verschiebung längs der Geraden $v = 0$:

(15) $p' = p \cos\frac{v}{k} - \frac{u}{k}\sin\frac{v}{k},\ u' = pk \sin\frac{v}{k} + u \cos\frac{v}{k},\ v' = v,$

und für die Verschiebung längs der Geraden $u = 0$:

(16) $p' = p \cos\frac{\varrho}{k} - \frac{v}{k}\sin\frac{\varrho}{k},\ u' = u,\ v' = pk \sin\frac{\varrho}{k} + v \cos\frac{\varrho}{k}.$

6. Um den Nachweis, dafs jeder der drei Möglichkeiten, welche wir für die Verschiebung einer einzelnen Geraden in sich gefunden haben, auch für die Ebene ein abgeschlossenes Formelsystem entspricht, zu vervollständigen, dürfte es am einfachsten sein, die drei verschiedenen Arten von Transformationen, welche wir in jedem Falle erhalten haben, mit einander zu verbinden. Dadurch gelangen wir jedesmal zu allgemeineren Transformationen und haben nur zu zeigen, dafs dadurch jede Bewegung der Ebene in sich dargestellt wird. Dieser Nachweis wird überaus einfach, wenn man einige Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen benutzt. Für jeden, der mit dieser Theorie irgend vertraut ist, bedarf der Gang des Beweises keiner Andeutung.

Dem elementaren Charakter der Herleitung dürfte jedoch ein anderer Weg besser entsprechen, den wir nur für die elliptische Ebene darlegen wollen.

Für die Drehung um den Anfangspunkt gelten die Gleichungen:

$$p' = p,\ u' = u \cos\alpha - v \sin\alpha,\ v' = u \sin\alpha + v \cos\alpha.$$

Damit verbinden wir die Drehung:

$$p'' = p',\ u'' = u' \cos\beta - v' \sin\beta,\ v'' = u' \sin\beta + v' \cos\beta.$$

Setzen wir diese beiden Drehungen zusammen, so müssen wir in die beiden letzten Ausdrücke für p', u', v' die Werte einsetzen, die aus den ersten Gleichungen folgen; dadurch erhalten wir:

$$p'' = p, \quad u'' = u \cos(\alpha + \beta) - v' \sin(\alpha + \beta),$$
$$v'' = a \sin(\alpha + \beta) + v \cos(\alpha + \beta).$$

Nun beschreiben bei einer Drehung alle durch den ruhenden Punkt gehenden Geraden gleiche Winkel; die Gröfse dieses Winkels bestimmt die Gröfse der Drehung. Schon hieraus folgt, dafs die Hilfsgröfse α, welche in den ersten Gleichungen vorkommt, eine Funktion des Drehungswinkels ist. Da aber bei der Zusammensetzung zweier Drehungen einerseits, wie die Geometrie lehrt, die Drehungswinkel sich addieren, andererseits, wie wir gesehen haben, die Hilfsgröfsen α und β sich ebenfalls zu ihrer Summe vereinigen, so mufs die Summe α dem Drehungswinkel proportional sein. Für $\lambda = \pi$ wird $\xi' = -\xi$, $\eta' = \eta$, oder der Drehungswinkel wird gleich zwei Rechten. Demnach mufs die Gröfse α gleich dem Winkel sein, welcher bei der entsprechenden Drehung von jeder durch den Anfangspunkt gehenden Geraden beschrieben wird.

In ähnlicher Weise betrachten wir jetzt die Verschiebung längs der Geraden $v = 0$. Mit der Transformation

$$p' = p \cos\frac{\lambda}{k} - \frac{u}{k} \sin\frac{\lambda}{k}, \quad u' = pk \sin\frac{\lambda}{k} + v \cos\frac{\lambda}{k}, \quad v' = v.$$

verbinden wir die weitere:

$$p'' = p' \cos\frac{\mu}{k} - \frac{u'}{k} \sin\frac{\mu}{k}, \quad u'' = p'k \sin\frac{\mu}{k} + v' \cos\frac{\mu}{k}, \quad v'' = v'.$$

Dann wird (p'', u'', v'') durch (p, u, v) ausgedrückt, wenn man nur in den ersten Gleichungen λ durch $\lambda + \mu$ ersetzt. Nun wird jeder Punkt der Geraden $v = 0$ um dieselbe Strecke verschoben; wir dürfen also aus der Art der Zusammensetzung zweier Verschiebungen schliefsen, dafs die Gröfse λ dieser Strecke proportional ist. Da endlich über die Gröfse k noch verfügt werden kann, so dürfen wir die Hilfsgröfse λ geradezu gleich der Strecke setzen, welche irgend ein Punkt der Geraden bei dieser Verschiebung beschreibt.

Ist diese Strecke gleich e, so gelangt der Anfangspunkt in einen Punkt der Geraden $v = 0$, der von ihm die Entfernung e

hat. Da aber für $\lambda = e$, $p = 1$, $u = v = 0$ wird $p' = \cos\frac{e}{k}$, $u' = k \sin\frac{e}{k}$, so hat derjenige Punkt der Geraden $v = 0$, welcher vom Anfangspunkte den Abstand e hat, die Koordinaten $\cos\frac{e}{k}$, $k \sin\frac{e}{k}$, 0.

Führen wir eine Drehung um den Punkt (1, 0, 0) aus und beachten die Lage, welche der Punkt $(\cos\frac{e}{k}, k \sin\frac{e}{k}, 0)$ hierdurch erlangt, so finden wir für einen Punkt, der vom Anfangspunkte den Abstand e hat und dessen Verbindungsgerade mit dem Anfangspunkte zur Geraden $u = 0$ unter dem Winkel α geneigt ist, die Koordinaten:

$$p = \cos\frac{e}{k}, \quad u = k \sin\frac{e}{k} \cos\alpha, \quad v = k \sin\frac{e}{k} \sin\alpha.$$

Ein Punkt, der auf der Achse $u = 0$ liegt und vom Anfangspunkte (und damit auch von der andern Achse) den Abstand a hat, besitzt die Koordinaten: $p = \cos\frac{a}{k}$, $u = 0$, $v = k \sin\frac{a}{k}$. Indem wir jetzt eine Verschiebung längs der Achse $v = 0$ ausführen und dabei jeden Punkt der Achse um die Strecke b fortbewegen, erlangt der Punkt $\left(\cos\frac{a}{k}, 0, k \sin\frac{a}{k}\right)$ die Lage, welche durch die Koordinaten $\left(\cos\frac{a}{b}\cos\frac{b}{k}, k \cos\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}, k \sin\frac{a}{k}\right)$ bestimmt ist.

Nun ändert sich bei dieser Verschiebung der Abstand von der Achse $v = 0$ nicht; somit ist allgemein $v = k \sin\frac{a}{k}$, wenn a den Abstand von der Geraden $v = 0$ angiebt. Eine entsprechende Bedeutung hat die Koordinate u. Indem wir endlich die verschiedenen Werte vergleichen, die wir für p und v erhalten haben, folgt der Satz:

Sind a und b die Katheten, e die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem der Seite a der Winkel α gegenüberliegt, so gelten die Formeln:

$$\cos\frac{e}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}, \quad \sin\frac{a}{k} = \sin\frac{e}{k}\sin\alpha.$$

Demnach können wir jetzt auf dem in I § 15 (B. 1. S. 42—49) angegebenen Wege die Trigonometrie herleiten und gelangen zu dem in I § 21 (B. 1. S. 70—72) aufgestellten analytischen System.

In ganz entsprechender Weise behandeln wir die beiden anderen Fälle; wir erhalten also dieselben Möglichkeiten, welche wir im ersten Abschnitte unter anderem durch Betrachtung unendlich kleiner Dreiecke hergeleitet haben.

7. Da die vorangehende Entwicklung uns die trigonometrischen Formeln geliefert hat, so ist es nicht mehr nötig, die Bewegung räumlicher Gebilde eigens zu untersuchen. Wir möchten nur darauf hinweisen, dafs es nicht notwendig ist, zuerst die Ebene zu untersuchen, und dafs man mit gleicher Leichtigkeit den Raum sofort der Untersuchung zu Grunde legen kann. Dabei benutzt man etwa folgende Sätze:

a) Die Punkte, welche von einem festen Punkte gleichen Abstand haben, liegen auf einer Fläche, der Kugel, welche von jeder durch den festen Punkt gelegten Ebene in einer geschlossenen Linie geschnitten wird.

b) Bei der Ruhe einer Geraden ist noch Bewegung möglich; dann beschreibt jeder Punkt, der dieser Geraden nicht angehört, einen Kreis.

c) Auf allen Tangenten einer Kugel schneidet jede konzentrische, die erste umschliefsende Kugel vom Berührungspunkte aus gleiche Strecken ab.

d) Alle Geraden, welche eine Kugel in demselben Punkte berühren, liegen auf einer Ebene, der Tangentialebene des Punktes.

e) Durch Verschiebung längs eines Durchmessers kann man die Tangentialebene des einen Endpunktes mit der des andern zur Deckung bringen.

Aus der vorigen Untersuchung nehme man den Satz herüber, dafs der Kreis eine Kurve zweiter Ordnung ist. Da hiernach die Kugel von jeder Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten wird, so folgert man, dafs sie selbst eine Fläche zweiter Ordnung ist. Demnach kann man ihre Gleichung, indem man den festen Punkt zum Anfangspunkte der Koordinaten nimmt, auf die Form bringen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2.$$

Der Drehung um die Gerade $\eta = \zeta = 0$ entspricht die Transformation:

$$\xi' = \xi,\ \eta' = \eta \cos \alpha - \zeta \sin \alpha,\ \zeta' = \eta \sin \alpha + \zeta \cos \alpha.$$

Die weitere Entwicklung kann genau in der früher angegebenen Weise durchgeführt werden. Für einen parabolischen Raum zeigt sich, dafs ξ, η, ζ geradezu die Cartesischen Koordinaten sind. Für einen elliptischen Raum führe man vier neue Gröfsen p, u, v, w durch die Gleichungen ein:

$$\xi = \frac{u}{p},\ \eta = \frac{v}{p},\ \zeta = \frac{w}{p},\ k^2p^2 + u^2 + v^2 + w^2 = k^2.$$

In ähnlicher Weise verfährt man für eine hyperbolische Raumform. Dann bleibt die Behandlung ungeändert und führt auch zu denselben Ergebnissen.

§ 6.

Projektivität und Bewegung. Abschliefsende Untersuchung.

Der folgende Paragraph versucht einerseits die im vorangehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen auf ihr geringstes Mafs zurückzuführen; andererseits knüpft er an § 4 an, indem er ebenfalls die Metrik projektiv begründet, und zwar wiederum durch geeignete Beschränkung der allgemeinen projektiven Gruppe.

1. Der Kürze des Ausdrucks wegen empfiehlt es sich, jede Zuordnung von Raumteilen, bei der im allgemeinen jeder Punkt einem Punkte, jede Linie einer Linie und jede Fläche einer Fläche entspricht, eine Bewegung zu nennen. Dann werden wir diejenigen Zuordnungen, durch welche kongruente Raumgebilde auf einander bezogen werden, als starre Bewegungen bezeichnen. Indem wir diese Ausdrücke gebrauchen, liegt die Frage nahe: Welche Eigenschaften müssen wir den allgemeinen Bewegungen beilegen, um zu den starren Bewegungen zu gelangen?

Um diese Frage zu beantworten, glaube ich an erster Stelle die Forderung aufstellen zu sollen: Wenn zwei Gebilde demselben dritten Gebilde kongruent sind, so sind sie auch unter einander kongruent.

Diese Forderung kann auch in folgender Form ausgesprochen werden:

Eine Bewegung beziehe einen Raumteil I auf einen Raumteil II, eine andere den Raumteil II auf einen Raumteil III; dann soll es auch möglich sein, den Raumteil I auf den Raumteil III durch eine Bewegung zu beziehen.

Ohne diese oder eine entsprechende Annahme, die so selbstverständlich erscheint, dafs sie fast nie ausdrücklich erwähnt wird, ist es nicht möglich, irgend einen Kongruenzsatz anzuwenden. Andererseits mufs man diese Voraussetzung zu beliebigen Annahmen über die Bewegung noch hinzufügen, wenn man in der Geometrie die Bewegung benutzen will.

Die projektive Geometrie wird gut thun, an zweiter Stelle die Annahme zu machen:

Jede Bewegung der geforderten Art läfst das System der Geraden und Ebenen unverändert.

Hiernach soll jede Gerade in eine Gerade, jede Ebene in eine Ebene übergeführt werden. Zu dem Ende genügt es anzunehmen, dafs jede Ebene wieder in eine Ebene übergeht. Denn, wenn man mehrere Ebenen betrachtet, die sich in derselben Geraden schneiden, so werden sie durch die Bewegung in Ebenen verwandelt, die ebenfalls eine Gerade gemeinschaftlich haben; somit entspricht jeder Geraden wieder eine Gerade. Indem wir den früher eingeführten Begriff der Kollinealität benutzen, können wir unsere zweite Forderung auch in folgender Weise aussprechen: Die Zuordnung der Punkte, welche durch eine starre Bewegung vermittelt wird, soll eine kollineare Verwandtschaft sein.

Benutzen wir zur Darstellung der Punkte des Raumes projektive homogene Koordinaten, so sagt die zweite Forderung, dafs das Resultat jeder starren Bewegung durch homogene lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt wird. Da die erste Forderung für sich verlangt, dafs die analytische Darstellung der starren Bewegungen eine Transformations-Gruppe im Lieschen Sinne bildet, so verbinden sich die beiden angegebenen Voraussetzungen dahin, dafs die Gesamtheit der starren Bewegungen durch eine projektive Gruppe einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit dargestellt wird.

Unsere Aufgabe besteht also jetzt darin, solche Eigenschaften der in § 4 gefundenen Gruppe

$$x_0 p_\varkappa - k p_0 x_\varkappa, \quad p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

anzugeben, durch welche sie sich von allen übrigen projektiven Gruppen unterscheidet.

2. Die soeben aufgestellten Forderungen liegen auch den im vorigen Paragraphen durchgeführten Untersuchungen, sowie überhaupt denen des ersten und zweiten Abschnitts zu Grunde. Zudem haben wir dort die Annahme gemacht:

Es ist möglich, jede Ebene in sich zu bewegen, während irgend einer ihrer Punkte in Ruhe gehalten wird; dann bewegt sich aber jeder andere Punkt der Ebene nur noch in einer geschlossenen Linie.

Dafs diese Forderung in Verbindung mit den beiden ersten für unsern Zweck genügt, haben wir mehrmals bewiesen. Es würde also nicht erlaubt sein, weitere Forderungen, etwa über die Erhaltung gewisser Winkel, beizufügen. Im Gegenteil müssen wir fragen, ob die dritte Forderung nicht bereits zu weit geht und ob sie nicht durch enger begrenzte Voraussetzungen ersetzt werden kann. Denn man erkennt sehr leicht, dafs in der letzten Forderung aufserordentlich viele Einzelforderungen zusammengefafst sind. Erstens wird die angegebene Eigenschaft allen Ebenen beigelegt, und diese bilden eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit; zweitens kann in einer Ebene noch jeder Punkt in Ruhe gehalten werden, und endlich bildet die Gesamtheit der Linien, in denen sich bei der Ruhe eines Punktes die übrigen Punkte der Ebene bewegen, eine einfach unendliche Schar. So umfafst die dritte Voraussetzung eine sechsfache Unendlichkeit von Einzelforderungen.

Nun folgt aus den beiden ersten Forderungen, wie wir schon erwähnt haben, dafs die Gesamtheit der starren Bewegungen analytisch durch eine projektive Gruppe des Raumes dargestellt wird. Die Zahl der wesentlich verschiedenen projektiven Gruppen des dreidimensionalen Raumes ist aber eine endliche; man kann also jede einzelne dadurch vollständig bestimmen, dafs man ihr eine endliche Zahl von Eigenschaften beilegt. Somit genügt auch eine endliche Zahl von Bedingungen, um diejenige projektive Gruppe des Raumes zu charakterisieren, durch welche die starren Bewegungen dargestellt werden können.

Ehe wir dazu übergehen, ein derartiges System von For-

derungen anzugeben, wollen wir einige projektive Gruppen der Ebene und des Raumes einer nähern Untersuchung unterziehen.

3. Satz. Wird bei der Ruhe eines Punktes durch eine eingliedrige projektive Gruppe eine Ebene so in sich bewegt, dafs ein zweiter Punkt in einer geschlossenen krummen Linie bewegt wird, so bewegt diese Gruppe jeden Punkt in einer geschlossenen Linie.

Wir betrachten eine eingliedrige projektive Gruppe, bei welcher ein Punkt A in Ruhe bleibt und ein zweiter Punkt B in einer geschlossenen Linie bewegt wird. Dabei ist es angebracht vorauszusetzen, dafs nicht blofs die Punkte A und B, sondern auch alle Lagen, welche der Punkt B bei den Transformationen der Gruppe erhält, dem Gebiet angehören, das wir von vorn herein unserer Untersuchung zu Grunde gelegt haben. Damit wird auch verlangt, dafs der Punkt B sich nicht in einer geraden Linie bewegt. Es ist also nicht rein willkürlich, dafs wir in unserm Lehrsatz die Bahn des Punktes B als krummlinig vorausgesetzt haben. Wir wollen jetzt zeigen, dafs jede projektive Gruppe, welche dieser Forderung für den Punkt B genügt, alle Punkte der Ebene in geschlossenen Linien bewegt und dafs alle Punkte zugleich ihre Anfangslage wieder annehmen.

Zum Beweise legen wir durch den Punkt A die beiden Achsen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ und zeigen auf die bereits im vorletzten Paragraphen (S. 119) durchgeführte Weise, dafs die unendlich kleine Transformation, aus der die genannte eingliedrige Gruppe hervorgeht, in der Form

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0$$

dargestellt werden kann. Bei der Bewegung, welche dieser Gruppe entspricht, bleibt nicht nur die Gerade $x_0 = 0$ in sich, sondern jeder ihrer Punkte kehrt auch in seine Anfangslage zurück. Da aber angenommen ist, dafs der Punkt B sich in einer krummen Linie bewegt, so ist es notwendig, die Bahnkurve für irgend einen anderen Punkt der Ebene zu untersuchen. Zu dem Ende schreiben wir die vorstehende unendlich kleine Transformation in der Form

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 - l (p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

durch welche die beiden Differentialgleichungen vertreten werden:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - l x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = - x_1 - l x_1.$$

Hier führe man die beiden Variabeln r und u vermittels der Gleichungen ein:

$$x_1 = r \sin u, \; x_2 = r \cos u.$$

Alsdann nimmt die Gleichung der Linie, in der sich ein Punkt bewegt, die Form an:

$$r\, e^{lu} = C.$$

Für $C = 0$ wird nur der ruhende Punkt dargestellt. Soll die durch diese Gleichung bei irgend einem andern Werte von C bestimmte Gleichung geschlossen sein, so mufs der Koefficient l verschwinden. Dann bewegen sich aber alle Punkte in geschlossenen Kurven, wie im Lehrsatze behauptet wurde.

4. Indem wir die soeben benutzten Punkte A und B beibehalten, suchen wir diejenigen projektiven Gruppen der Ebene, welche folgenden Bedingungen genügen:

a) Bei der Ruhe des Punktes A soll sich der Punkt B in einer einzigen geschlossenen krummen Linie bewegen;

b) die Gruppe gestattet eine Bewegung des Punktes A.

Wie wir bewiesen haben, enthält die gesuchte Gruppe eine infinitesimale Transformation, der wir bei passender Wahl der Koordinaten die Form geben können:

$$p_1 x_2 - p_2 x_1.$$

Da der Punkt (1, 0, 0) nicht bei allen Transformationen der Gruppe in Ruhe gehalten wird, so mufs die Gruppe noch eine unendlich kleine Transformation enthalten:

$$p_0 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma b_\varkappa x_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2)$$

worin die Koefficienten b_1 und b_2 nicht beide verschwinden. Wie wir in § 4, 2 bewiesen haben, sind jetzt drei Fälle möglich: entweder ist die Gruppe die allgemeine projektive Gruppe der Ebene oder sie ist dreigliedrig und enthält die drei Transformationen $p_1 x_2 - p_2 x_1$, $a_0 p_0 x_1 + b_0 p_1 x_0$, $a_0 p_0 x_2 + b_0 p_2 x_0$, wo der Koefficient b_0 nicht verschwindet, oder die Gruppe ist viergliedrig und wird durch die Transformationen $p_1 x_2 - p_2 x_1$, $p_1 x_0$, $p_2 x_0$, $p_0 x_0$ bestimmt. Der erste und der dritte Fall sind auszuschliefsen, da sie verlangen würden, dafs bei der Ruhe von A der Punkt B noch jede beliebige Lage annehmen könnte. Es bleibt also nur der zweite Fall. Da man zudem $b_0 = 1$, $a_0 = -k$ setzen darf, enthält die verlangte Gruppe die drei Transformationen

$$(1) \quad p_1 x_2 - p_2 x_1, \; p_1 x_0 - k p_0 x_1, \; p_2 x_0 - k p_0 x_2,$$

und keine weitere davon unabhängige Transformation. Demnach sind wir auf folgenden Satz geführt:

Wenn eine projektive Gruppe der Ebene die Eigenschaft hat, dafs bei der Ruhe eines festgewählten Punktes, der durch Transformationen der Gruppe noch bewegt werden kann, für einen zweiten, ebenfalls willkürlich aber fest gewählten Punkt die Bewegung nur in einer einzigen geschlossenen krummen Linie möglich ist, so ist die Gruppe dreigliedrig und wird durch die Transformationen (1) bestimmt. Dann kann man die Ebene noch in sich verschieben, während irgend ein anderer Punkt in Ruhe gehalten wird; hierbei beschreiben jedesmal die bewegten Punkte geschlossene Linien.

Die Konstante k in (1) kann noch jeden beliebigen Wert annehmen. Solange wir aber nur die Ebene für sich betrachten, kommt es nur auf das Vorzeichen, aber nicht auf die Gröfse dieser Konstanten an, da wir x_0 durch ax_0 ersetzen dürfen, wofern wir auch ap_1 für p_1 und ap_2 für p_2 schreiben. Wesentlich verschieden sind also nur die drei Fälle, dafs k gleich null oder positiv oder negativ ist. Wofern wir in einer Ebene nur die durch die Transformationen (1) bestimmte Gruppe betrachten, wollen wir in Ermangelung eines passenden Ausdrucks die Ebene selbst für $k = 0$ eine parabolische, für $k > 0$ eine elliptische und für $k < 0$ eine hyperbolische Ebene nennen.

5. Angenommen, im Raume gebe es eine Ebene von der in der vorigen Nummer betrachteten Eigenschaft. Indem wir sie zur Ebene $x_3 = 0$ wählen, enthält diejenige Gruppe, durch welche die Umgestaltungen des Raumes angegeben werden, die drei Transformationen:

$$\begin{aligned} & x_3\,(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) + p_1x_2 - p_2x_1 \\ (2)\quad & x_3\,(b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3) + p_1x_0 - kp_0x_1 \\ & x_3\,(c_0p_0 + c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3) + p_2x_1 - kp_0x_2. \end{aligned}$$

Wir wollen untersuchen, ob sich nicht bereits aus dem Vorkommen dieser drei Transformationen Folgerungen ziehen lassen, und beschränken uns zunächst auf den Fall, dafs der Koefficient k von null verschieden ist.

Indem wir unter dieser Annahme je zwei der Transformationen (2) mit einander kombinieren, erhalten wir eine Transformation, die jedesmal mit der dritten grofse Ähnlichkeit hat,

aber kein Glied mit $p_3 x_3$ enthält. Demnach kommen in der Gruppe auch Transformationen vor, welche die in (2) angegebene Form für $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ besitzen. Es ist also gestattet, diese Annahme für die Ausdrücke (2) selbst zu machen.

Soll jetzt jedesmal durch Kombination zweier Transformationen (2) die dritte erhalten werden, so mufs offenbar sein:

$$(3) \quad a_0 = b_2 = c_1 = 0,\ b_0 = ka_2,\ c_0 = -ka_1,\ c_2 = b_1.$$

Wenn diese Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind, so erhält man durch Subtraktion der neu gewonnenen von der entsprechenden Transformation (2) eine Transformation:

$$x_3 (e_0 p_0 + e_1 p_1 + e_2 p_2),$$

worin mindestens einer der Koefficienten e_0, e_1, e_2 von null verschieden ist. Diese neue Transformation kann man aber wieder mehrmals mit den drei Transformationen (2) kombinieren und erkennt, dafs die drei Transformationen $x_3 p_0$, $x_3 p_1$, $x_3 p_2$ der Gruppe angehören. Indem man diese je mit einem passenden Koefficienten multipliziert und von den Transformationen (2) abzieht, erkennt man, dafs in der Gruppe die Transformationen (1) vorkommen. Zudem kann noch die Transformation $x_3 p_3$ hinzutreten.

Hiernach ergeben sich für die Gesamtheit der Transformationen, bei denen die Ebene $x_3 = 0$ in der angegebenen Weise und unter der Annahme $k \gtreqless 0$ in sich verschoben wird, vier Möglichkeiten: sie bilden entweder eine dreigliedrige oder eine viergliedrige oder eine sechsgliedrige oder eine siebengliedrige Gruppe. Jede dieser Gruppen enthält bei passender Wahl der Koordinaten die Transformationen (1); zu ihnen tritt im zweiten Falle die Transformation $p_3 x_3$, im dritten $x_3 p_0$, $x_3 p_1$, $x_3 p_2$ und im letzten aufser diesen dreien noch $x_3 p_3$.

So interessant es auch wäre, jede der verschiedenen Möglichkeiten für sich zu verfolgen und zu untersuchen, welche weitern projektiven Transformationen man jedesmal mit den angegebenen verbinden kann, wofern man nur an der Forderung festhält, dafs die Ebene $x_3 = 0$ nur auf die bezeichnete Weise in sich bewegt werden kann, müssen wir doch davon Abstand nehmen, weil diese Untersuchung für die Erledigung unserer nächsten Aufgabe nicht unbedingt notwendig ist.

6. Wir fügen die Annahme bei, dafs eine weitere durch den Punkt A gehende Ebene bei der Ruhe dieses Punktes noch in sich verschoben werden kann, und dafs hierbei für einen festgewählten zweiten Punkt die Bewegung auf eine einzige geschlossene Linie beschränkt ist. Unter dieser Annahme sind, wie wir jetzt nachweisen wollen, die drei letzten Möglichkeiten ausgeschlossen; es müssen also die drei Transformationen (2) eine dreigliedrige Untergruppe bilden, und nur die ihr angehörenden Transformationen bewegen die Ebene $x_3 = 0$ in sich.

Zum Beweise gehen wir von den Transformationen (2) aus. Wenn dies nicht die einzigen von einander unabhängigen Transformationen sind, bei denen die Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird, so müssen zu ihnen entweder die Transformationen $p_0 x_3$, $p_1 x_3$, $p_2 x_3$ oder $p_3 x_3$ allein oder die letzte in Verbindung mit den drei ersten hinzutreten. Sobald wir nachgewiesen haben, dafs diese letzten drei Möglichkeiten ausgeschlossen sind, wissen wir, dafs die Transformationen (2) eine Untergruppe bestimmen und zwar die einzige, bei deren Transformation die Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird.

Nun ist in der Darstellung (2) der Ebene $x_2 = 0$ keine weitere Beschränkung auferlegt, als dafs sie durch den Punkt A geht. Wir können daher die zweite Ebene, die wir auf die angegebene Weise in sich verschoben werden lassen, zur Ebene $x_2 = 0$ wählen. Demnach enthält die Gruppe folgende Transformation:

$$(4)\quad x_2 (\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3) + x_1 (\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_3 p_3) \\ + x_3 (\nu_0 p_0 + \nu_1 p_1 + \nu_3 p_3).$$

Damit ein Punkt der Ebene bei der aus dieser infinitesimalen Transformation hervorgehenden eingliedrigen Gruppe eine geschlossene Linie beschreibt, mufs der Ausdruck

$$(\mu_1 - \nu_3)^2 + 4\,\mu_3 \nu_1$$

einen negativen Wert haben. Nun kann aber diese Diskriminante jedenfalls einen positiven Wert erhalten, sobald einer der vier Koefficienten μ_1, μ_3, ν_1, ν_3 ganz willkürlich gewählt werden kann. Hiernach darf die Gruppe neben der Transformation (4) jedenfalls keine der vier Transformationen $x_1 p_1$, $x_1 p_3$, $x_3 p_1$, $x_3 p_3$ enthalten, weil man diese sonst mit einem beliebigen Faktor multiplizieren und zu (4) hinzufügen dürfte. Sobald aber die Ebene

$x_3 = 0$ noch durch Transformationen in sich bewegt wird, die von den in (2) aufgestellten unabhängig wird, enthält die Gruppe die Transformationen $x_3 p_3$ und $x_3 p_1$ oder eine von ihnen. Man kann daher mindestens einen der Koefficienten ν_1 und ν_3 willkürlich wählen und so die Diskriminante positiv machen, was mit unserer Forderung unvereinbar ist.

Sobald also irgend eine zweite durch A gelegte Ebene eine Bewegung der angegebenen Art gestattet, gehören alle Transformationen, durch welche die zuerst gegebene Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird, der durch die drei Transformationen (2) bestimmten Untergruppe an. Hierin sind die Koefficienten a_3, b_3, c_3 gleich null; zwischen den übrigen Koefficienten bestehen die Bedingungen (3). Es ist infolge dessen möglich, das Koordinatensystem so zu wählen, dafs die Transformationen (2) die Form (1) annehmen.

7. Es dürfte angebracht sein, die Gesamtheit der durch diese Untergruppe hervorgerufenen Bewegungen etwas näher zu betrachten.

Da durch die Transformationen (1) die Form

$$\frac{x_0^2}{p} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ungeändert bleibt und das Zeichen p_3 darin nicht vorkommt, so werden für beliebige Werte von μ alle Flächen des Büschels

$$(5) \quad \frac{x_0^2}{p} + x_1^2 + x_2^2 + \mu x_3^2 = 0$$

in sich verschoben. Jede Ebene, welche eine dieser Flächen berührt, bleibt bei allen Transformationen der Untergruppe Tangentialebene an dieselbe Fläche.

Soll durch eine Transformation der Gruppe (1) der Punkt (1, 0, 0, 0) in Ruhe bleiben, so mufs sie der aus $p_1 x_2 - p_2 x_1$ hervorgehenden eingliedrigen Untergruppe angehören. Daher bleibt jeder Punkt der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ in Ruhe; alle Punkte des Raumes bewegen sich in geschlossenen Linien und nehmen gleichzeitig die Anfangslage wieder ein. Jede Ebene, die eine der Flächen (5) in einem Schnittpunkte mit der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ berührt, deren Gleichung man also bei beliebigem Werte von α in der Form $x_3 = \alpha x_0$ schreiben kann, wird bei dieser Bewegung in sich verschoben.

Nun kann man aber, wie sich aus 3. ergiebt, so lange nur die Umgebung des Punktes A betrachtet wird, jeden Punkt der Ebene $x_3 = 0$ zum Anfangspunkte des Koordinaten-Systems machen und dann noch immer den Transformationen, durch welche die Ebene umgestaltet wird, die Form (1) geben. Die soeben gezogene Folgerung gilt also auch, wenn man von irgend einem anderen Punkte der Ebene ausgeht: bei seiner Ruhe werden alle Punkte einer Geraden sich nicht bewegen; die Tangentialebene, die in einem Schnittpunkte dieser Linie mit einer Fläche (5) an sie gelegt wird, wird in sich verschoben; alle Punkte des Raumes legen geschlossene Bahnen zurück.

Dasselbe erkennt man in folgender Weise: Die Punkte $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : x_3)$ bleiben bei festen Werten von ξ_0, ξ_1, ξ_2 und beliebigen Werten von x_3 in Ruhe, wenn der Raum derjenigen eingliedrigen Gruppe unterworfen ist, deren infinitesimale Transformation durch das Symbol

$$k\xi_0 (p_1 x_2 - p_2 x_1) + \xi_2 (p_0 x_1 - kp_1 x_0) - \xi_1 (p_0 x_2 - kp_2 x_0)$$

bezeichnet wird. Zugleich wird hierbei die Ebene

$$k\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \alpha x_3 = 0$$

für jeden beliebigen Wert von α in sich verschoben.

Beim Beweise dieser Sätze ist vorausgesetzt, dafs der Koefficient k von null verschieden ist und dafs die Untergruppe, bei deren Transformationen die Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird, nur drei Parameter enthält. Wir bemerken aber, dafs die Änderungen, welche diese Sätze erleiden, wofern die genannte Untergruppe mehrgliedrig ist, sich leicht angeben lassen.

8. Bevor wir weitergehen, wollen wir die gemachten Voraussetzungen und die daraus gezogenen Folgerungen nochmals kurz überblicken.

Durch einen Punkt A, dessen Bewegung durch die Gruppe gestattet ist, legen wir eine Ebene $x_3 = 0$ und nehmen an, dafs sie bei der Ruhe von A noch bewegt werden kann, dafs aber hierbei ein Punkt B dieser Ebene nur eine einzige geschlossene krumme Linie beschreibt. Die Bewegung dieser Ebene wird durch die Transformationen (1) bestimmt. Nehmen wir an, dafs hierin der Koefficient k von null verschieden ist, und fügen wir die Voraussetzung hinzu, dafs eine weitere durch A gelegte Ebene bei der Ruhe von A in sich verschoben werden kann, und dafs

auch bei dieser Bewegung für einen Punkt C der zweiten Ebene nur eine einzige, und zwar eine geschlossene Bahnkurve möglich ist, so folgt, dafs bei der zuerst betrachteten Bewegung zugleich mit dem Punkte A noch die Punkte einer Geraden, die durch die in sich verschobene Ebene und den Punkt A bestimmt ist, in Ruhe gehalten werden. Demnach ist es jetzt gestattet zu fordern, dafs die zweite Ebene durch diese Gerade hindurchgeht. Bringen wir jetzt die Transformationen (2) auf die Form (1), so bleibt mit dem Punkte (1, 0, 0, 0) die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ in Ruhe; somit dürfen wir die Ebene $x_2 = 0$ mit derjenigen Ebene zusammenfallen lassen, die wir an zweiter Stelle betrachtet haben. Wir nehmen daher an, dafs der Gruppe aufser den Transformationen (1) noch die Transformation (4) angehört, und dafs zwischen ihren Koefficienten die Bedingung besteht:

$$(6)\quad (\mu_1 - \nu_3)^2 + 4\mu_1\nu_3 < 0.$$

Die Transformation (4) schreiben wir in der Form:

$$p_3 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_3 \Sigma b_\varkappa p_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa, \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1, 2),$$

wobei wir wegen der Bedingung (6) voraussetzen, dafs a_1 und b_1 beide von null verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wenn jetzt der Koefficient k gleich eins ist, so können wir unter Vertauschung der Marken 0 und 3 den in § 4, 2 bewiesenen Satz anwenden. Weil aber für die dort eingeführten Konstanten a_0 und b_0 die Beziehung besteht: $a_0 : b_0 = a_1 : b_1$, so müssen drei neue Transformationen hinzutreten, die sich durch leichte Änderung von x_3 in die Form bringen lassen:

$$(7)\quad p_3x_0 - p_0x_3,\ p_3x_1 - p_1x_3,\ p_3x_2 - p_2x_3.$$

Nun benutzte unsere in § 4, 2 durchgeführte Untersuchung nur formelle Rechnungen, ohne die Realität zu berücksichtigen. Wir dürfen daher, wenn nur k von null verschieden ist, x_0 durch $x_0\sqrt{k}$ und entsprechend p_0 durch $\frac{p_0}{\sqrt{k}}$ ersetzen. Dadurch gelangen wir jetzt zu den Transformationen (7), in denen wir, um zu den Formen (1) zurückzukehren, die umgekehrte Substitution machen müssen. Demnach sind mit den Transformationen (1) noch die Transformationen zu verbinden:

$$(8)\quad p_3x_0 - kp_0x_3,\ p_3x_1 - p_1x_3,\ p_2x_3 - p_3x_2.$$

Die Gruppe kann keine von den sechs Transformationen (1) und (8) unabhängige Transformation enthalten, weil sie sonst die allgemeine projektive Gruppe sein würde und demnach jede der beiden betrachteten Ebenen auch noch auf andere Weise in sich verschoben werden könnte.

Die Transformationen (1) und (8) bestimmen diejenige Gruppe, von der wir im vorigen Paragraphen erkannt haben, dafs sie zu der starren Bewegung des metrischen Raumes pafst. Indessen ist bei der Herleitung noch die Annahme gemacht, dafs die in den Ausdrücken (1) auftretende Konstante k von null verschieden ist. Wir müssen also jetzt auch noch den Fall betrachten, dafs die Konstante k gleich null ist.

9. Wenn die Verschiebung der Ebene $x_3 = 0$ in sich durch die Transformationen (1) für $k = 0$ bestimmt wird, so enthält die Gruppe der räumlichen Umgestaltungen die Transformationen:

$$(9)\quad \begin{aligned} &x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 (a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) \\ &x_0 p_1 \qquad\qquad + x_3 (b_0 p_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \\ &x_0 p_2 \qquad\qquad + x_3 (c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3). \end{aligned}$$

Indem man die erste Transformation mit jeder der beiden anderen kombiniert, erhält man jedesmal eine Transformation, die in ihrer Form der dritten ähnlich ist, aber kein Glied mit $x_3 p_3$ enthält. Demnach dürfen wir annehmen, dafs die Koefficienten b_3 und c_3 gleich null sind.

Sollen unter dieser Voraussetzung die drei Transformationen (9) eine dreigliedrige Gruppe bestimmen, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(10)\quad \begin{aligned} &c_0 + a_3 b_0 = 0, \quad b_0 - a_3 c_0 = 0, \quad a_0 + a_3 b_1 + b_2 + c_1 = 0 \\ &a_3 b_2 - b_1 + c_2 = 0, \quad a_3 c_1 + c_2 - b_1 = 0, \quad a_0 + a_3 b_2 - b_2 - c_1 = 0. \end{aligned}$$

Wenn nicht, wie es die beiden ersten Gleichungen verlangen, $b_0 = c_0 = 0$ ist, so enthält die Gruppe eine Transformation $x_0 (e_0 p_0 + e_1 p_1 + e_2 p_2)$, worin der Koefficient e_0 nicht verschwindet. Wie sich dann durch wiederholte Kombination mit (9) zeigt, mufs die Gruppe die Transformationen $x_3 p_0$, $x_3 p_1$, $x_3 p_2$ enthalten. Wenn aber die Koefficienten b_0 und c_0 verschwinden, ohne dafs die letzten Gleichungen (10) befriedigt werden, so kommen in der Gruppe die Transformationen $x_3 p_1$ und $x_3 p_2$ vor. Wir können daher sagen: Wenn die Transformationen (9) nicht eine Untergruppe bestimmen, so ist mit ihnen

die Transformation $x_3 p_3$ oder es sind $x_3 p_1$ und $x_3 p_2$ oder diese drei Transformationen verbunden.

Jetzt fügen wir wieder die Annahme hinzu, dafs aufser der Ebene $x_3 = 0$ noch eine weitere durch den Punkt (1, 0, 0, 0) gelegte Ebene bei der Ruhe dieses Punktes in sich verschoben werden kann und dafs dabei die Bewegung, wenigstens für einen Punkt, auf eine geschlossene krumme Linie beschränkt ist. Dann kann man die in 5. durchgeführte Untersuchung anwenden und findet, dafs die neue Annahme nur gültig sein kann, wenn die Transformationen (9) eine dreigliedrige Untergruppe bestimmen und wenn nur die ihr angehörenden Transformationen gestatten, die Ebene $x_3 = 0$ in sich zu bewegen.

10. Die Gleichungen (10) verlangen, wie bereits bemerkt, dafs $b_0 = c_0 = 0$ ist. Im übrigen aber kann man ihnen auf zwei verschiedene Weisen genügen, nämlich

a) für $a_3 = a_0 = 0,\ c_2 = b_1,\ c_1 + b_2 = 0.$

b) für $a_0 + a_3 b_1 = 0,\ b_2 = c_1 = 0,\ c_2 = b_1.$

Durch eine leichte Änderung der Koordinaten kann man den Transformationen (9) im ersten Falle die Form geben:

$$(11)\quad x_1 p_2 - x_2 p_1,\ x_0 p_1 - l x_3 p_2,\ x_0 p_2 + l x_3 p_1;$$

im zweiten Falle erhält man:

$$(12)\quad x_1 p_2 - x_2 p_1 + \varrho x_3 p_3,\ x_0 p_1,\ x_0 p_2.$$

Durch alle Transformationen der Gruppe (11) wird jede Ebene $x_3 + \alpha x_0 = 0$ in sich bewegt. Mit dem Punkte (ξ_0, ξ_1, ξ_2, 0) der Ebene $x_3 = 0$ bleiben alle Punkte in Ruhe, die auf der Geraden liegen:

$$\xi_0 x_2 - \xi_2 x_0 + l\xi_1 x_3 = 0,\ \xi_0 x_1 - \xi_1 x_0 - l\xi_2 x_3 = 0.$$

Auch bewegt jede eingliedrige in (11) enthaltene Gruppe, bei der ein Punkt der Ebene $x_3 = 0$ in Ruhe gehalten wird, alle Punkte des Raumes in geschlossenen Linien.

Im zweiten Falle, wo die angegebene dreigliedrige Gruppe durch die Transformationen (12) bestimmt ist, verschiebt jede Transformation, bei der ein Punkt (ξ_0, ξ_1, ξ_2, 0) in Ruhe gehalten wird, die Gerade $x_0 : x_1 : x_2 = \xi_0 : \xi_1 : \xi_2$ in sich. Hierbei werden nur die Punkte der Ebene $x_3 = 0$ in geschlossenen Linien bewegt, von allen anderen Punkten aber werden Raumkurven beschrieben, welche zu den Schraubenlinien gehören, wofern nicht die Konstante ϱ den Wert null annimmt.

Die Gruppen (11) und (12) sind im allgemeinen verschieden; sie werden nur für $l = \varrho = 0$ identisch.

11. Jetzt fügen wir dieselbe Forderung bei, die wir oben (Nr. 7) für $k \lesseqgtr 0$ aufgestellt haben, dafs nämlich diejenige Ebene, die bei der Ruhe des Punktes (1, 0, 0, 0) auf die mehrfach angegebene Weise in sich verschoben werden kann, diejenige Gerade enthält, die bei der Ruhe dieses Punktes zugleich ihre Anfangslage beibehält. Wir dürfen dann wieder diese Ebene zur Ebene $x_2 = 0$ wählen und annehmen, dafs zu (11) oder (12) die Transformation (4) hinzutritt:

$$x_2 (\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3) + x_1 (\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_3 p_3) \\ + x_3 (\nu_0 p_0 + \nu_1 p_1 + \nu_3 p_3),$$

wo die Diskriminante $(\mu_1 - \nu_3)^2 + 4\mu_3\nu_1$ einen negativen Wert hat. Wie wir bereits gezeigt haben, darf die Gruppe keine der beiden Transformationen $x_3 p_3$ und $x_3 p_1$ enthalten; auch müssen die beiden Koefficienten μ_3 und ν_1 von null verschieden sein und entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Wir untersuchen an erster Stelle den Fall, dafs die dreigliedrige Gruppe für die Bewegung der Ebene $x_3 = 0$ in sich die an zweiter Stelle angegebene Form (12) besitzt. Dann kombinieren wir die Transformation (4) mit $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$. Indem wir in der jedesmal erhaltenen Transformation die Glieder mit $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$ weglassen, gelangen wir zu den Transformationen:

$$x_0 (\mu_0 p_0 + \mu_3 p_3) - p_1 (\lambda_0 x_2 + \mu_0 x_1 + \nu_0 x_3)$$

und

$$x_0 (\lambda_0 p_0 + \lambda_3 p_3) - p_2 (\lambda_0 x_2 + \mu_0 x_1 + \nu_0 x_3).$$

Die erste von ihnen multiplizieren wir mit λ_3, die zweite mit μ_3 und subtrahieren sie von einander; dadurch erhalten wir:

$$(\mu_0 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_0) x_0 p_0 - (\lambda_0 x_2 + \mu_0 x_1 + \nu_0 x_3)(\lambda_3 p_1 - \mu_3 p_2).$$

Indem man $x_0 p_0$ durch $-x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3$ ersetzt, sieht man, dafs die vorstehende Transformation den Punkt (1,0,0,0) in Ruhe läfst und die Ebene $x_3 = 0$ in sich verschiebt. Entweder müssen also hier alle Koefficienten verschwinden, oder die vorstehende mufs mit der ersten Transformation (12) identisch werden. Daraus folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dafs μ_3 von null verschieden ist, dafs die drei Koefficienten λ_0, μ_0, ν_0 verschwinden.

Demnach darf man jetzt unter Vertauschung der Marken 0 und 3 das Ergebnis von § 4, 3 auf $x_1p_2 - x_2p_1 + \varrho x_3p_3$ und die vorstehende Transformation (4) anwenden. Dabei entspricht der Koefficient μ_3 dem dort gebrauchten a_1 und ν_1 dem frühern b_1. Also enthält für $\varrho \gtrless 0$ die Gruppe u. a. die Transformationen x_3p_3 und x_3p_1, was mit unseren Forderungen nicht vereinbar ist. Soll also unsere Gruppe die Transformationen (12) enthalten, so mufs der Koefficient ϱ gleich null sein.

12. Wir müssen jetzt in gleicher Weise die Untergruppe (11) mit der Transformation (4) kombinieren. Letztere schreiben wir in der Form:

$$x_0 \Sigma a_\varkappa p_\varkappa + p_0 \Sigma b_\varkappa x_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

die wir in § 4, 2 zu Grunde gelegt haben. Dabei ist:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \; c_{21} = c_{23} = 0, \; b_1 = \mu_0 \; . \; . \; .$$

Wir haben aber bereits in § 4, 2 gesehen, dafs die vorstehende Transformation in Verbindung mit $x_1p_2 - x_2p_1$ die Transformation nach sich zieht:

$$(c_{12} + c_{21})(p_1x_1 - p_2x_2) - (c_{11} - c_{22})(p_1x_2 + p_2x_1).$$

Aus einem schon mehrmals angegebenen Grunde müssen hier die Koefficienten verschwinden, oder es mufs sein:

$$c_{12} + c_{21} = 0, \; c_{11} = c_{22}.$$

Berücksichtigen wir diese Beziehungen und die für einzelne Koefficienten angegebenen Werte, so folgt unmittelbar durch Kombination der obigen Transformation mit $x_1p_2 - x_2p_1$, dafs die Gruppe die Transformationen enthält:

$$(13) \quad \begin{gathered} -b_2p_0x_1 + b_1p_0x_1 - c_{32}p_3x_1 + c_{31}p_3x_2 + c_{13}p_2x_3, \\ b_1p_0x_1 + b_2p_0x_2 + c_{31}p_3x_1 + c_{32}p_3x_2 + c_{13}p_1x_3. \end{gathered}$$

Die Kombination dieser beiden Transformationen liefert:

$$2c_{13}x_3(b_2p_0 + c_{32}p_3) + c_{13}c_{31}(p_1x_2 - p_2x_1) \\ - c_{32}c_{13}(p_1x_1 + p_2x_2).$$

Da aber bei dieser Transformation der Punkt (1, 0, 0, 0) in Ruhe bleibt und die Ebene $x_3 = 0$ in sich verschoben wird, so mufs sie mit $x_1p_2 - x_2p_1$ identisch sein. Demnach mufs, weil die Koefficienten c_{13} und c_{31} nicht verschwinden, $c_{32} = b_2 = 0$ sein.

Kombiniert man hiernach die erste Transformation (13) mit der zweiten Transformation (11), oder die zweite Transformation (13) mit der dritten Transformation (11), so erhält man jedesmal

eine Umgestaltung des Raumes, bei welcher die Ebene $x_3 = 0$ in sich verbleibt. Die neue Form mufs also entweder nur verschwindende Koefficienten enthalten oder in der Gruppe (11) enthalten sein. Daraus folgt, dafs $b_1 = l = 0$ ist.

Hiernach gehen die Transformationen (13) über in

$$c_{31}p_3x_2 + c_{13}p_2x_3,$$
$$c_{31}p_3x_1 + c_{13}p_1x_3,$$

zu denen, wie die Kombination mit x_0p_1 und x_0p_2 zeigt, noch x_0p_3 hinzutritt. Weil aber das Produkt $c_{13} \cdot c_{31}$ negativ ist, kann man durch eine leichte Änderung die Koefficienten entgegengesetzt gleich machen. Die Gruppe enthält also die sechs Transformationen:

$$(14) \quad x_0p_\varkappa, \quad x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3).$$

Dafs weitere, von diesen sechs unabhängige Transformationen der Gruppe nicht angehören können, ohne dafs die über die Bewegung der Ebenen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ getroffenen Festsetzungen ihre Gültigkeit verlieren, zeigt die Untersuchung in § 4, 2.

13. Hiernach können wir die Frage beantworten:

Wie können wir die Bewegung in der allgemeinen Bedeutung des Wortes beschränken, um diejenige Bedeutung des Wortes zu erhalten, welche die metrische Geometrie bedarf?

Zwei allgemeine Forderungen sind bereits in 1. aufgestellt. Aus den durchgeführten Untersuchungen ergiebt sich ein System von speciellen Forderungen, das für unsern Zweck hinzugenommen werden kann. An erster Stelle verlangen wir, dafs eine durch einen Punkt A gelegte Ebene bei der Ruhe von A noch in sich verschoben werden kann, und dafs die Gesamtheit der Lagen, welche hierbei ein zweiter Punkt B einnimmt, eine geschlossene Linie bildet. Daraus folgt, dafs die für den Punkt B vorausgesetzte Eigenschaft jedem Punkt der Ebene zukommt.

Fügen wir jetzt die Annahme bei, dafs der Punkt A überhaupt noch bewegt werden kann, so verliert auch dieser Punkt seine bevorzugte Lage in der Ebene: man kann nämlich die Ebene bei der Ruhe irgend eines in ihr gelegenen Punktes in sich bewegen, und dabei werden jedesmal alle Punkte geschlossene Bahnen beschreiben. Die Gruppe der zugehörigen Transformationen ist dreigliedrig und hängt nur noch von einer willkürlichen

Konstanten k ab, wie es die drei Möglichkeiten verlangen, die für die metrische Geometrie bestehen.

Sobald eine weitere durch den Punkt A gehende Ebene bei der Ruhe dieses Punktes so in sich verschoben werden kann, dafs für einen einzigen Punkt C der Ebene nur eine, und zwar eine geschlossene Bahnkurve existiert, läfst sich daraus eine wichtige Folgerung ziehen, nämlich: Wenn der Raum sich so bewegt, dafs die erste Ebene bei der Ruhe von A in sich verschoben wird, so bleibt eine durch A gehende Gerade g in Deckung mit ihrer Anfangslage. Hiernach lassen wir die zweite Ebene, die bei der Ruhe von A in sich auf die angegebene Weise verschoben werden soll, durch die Gerade g gehen. Wir setzen also noch voraus:

Eine zweite Ebene gehe durch diejenige Gerade, welche in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt, wenn die erste Ebene bei der Ruhe von A in sich verschoben wird; wird diese Ebene bei der Ruhe des Punktes A in sich bewegt, so beschreibt ein der Ebene angehörender Punkt C eine geschlossene Kurve und nimmt nur Lagen auf dieser Linie an.

Sobald der Begriff der Bewegung in der angegebenen Weise beschränkt wird, erfüllt er alle Bedingungen, welche die metrische Geometrie stellt.

Übrigens verdient bemerkt zu werden, dafs die letzte Voraussetzung nicht in ihrem ganzen Umfange benutzt wird.

14. Demnach kommt es im wesentlichen darauf hinaus, die Existenz zweier Kreise vorauszusetzen; nur wird man sie nicht willkürlich annehmen dürfen, sondern mufs fordern, dafs ihre Ebenen auf einander senkrecht stehen. Dieser letztere Begriff wird aber nicht etwa axiomatisch vorausgesetzt, sondern ergiebt sich im Verlauf der Untersuchung.

Sobald man nur einen einzigen Kreis annimmt, folgt daraus die Existenz aller Kreise, welche mit ihm in einer Ebene liegen und denselben Mittelpunkt haben. Nimmt man jetzt noch an, dafs der Mittelpunkt in der Ebene des Kreises bewegt werden kann, so ergiebt sich, dafs jeder Punkt zum Mittelpunkt eines Systems von Kreisen gewählt werden kann; die Ebene besitzt die metrischen Eigenschaften. Soll eine zweite Ebene, welche von der ersten geschnitten wird, einen Kreis enthalten, so ergeben

sich gewisse Gesetze über die Art und Weise, wie der Raum bei der Verschiebung der Ebene in sich bewegt wird. Diese gestatten, jedem Punkt der Ebene eine feste, durch den Punkt gehende Gerade, die auf der Ebene errichtete Senkrechte, zuzuordnen. Durch diese Gerade läfst man die zweite Ebene hindurchgehen und setzt auch in ihr die Existenz eines Kreises voraus.

15. Wie wir in den §§ 6—11 des dritten Abschnitts (B. 1. S. 178 ff.) geometrische Ausdrücke für Sätze der Analysis gebrauchten und dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Form erreichten, welche aufserdem bedeutend zur Erleichterung des Verständnisses beitrug, ohne im geringsten den Boden der Geometrie zu betreten, so dient in der vorstehenden Entwicklung der Gebrauch der Worte: Ruhe, Bewegung, Verschiebung, Bahnlinie u. dgl. nur dazu, eine einfache und übersichtliche Ausdrucksweise zu schaffen. Demnach stehen die Entwicklungen dieses Paragraphen ganz auf dem Boden der Projektivität, obwohl die äufsere Form einen metrischen Charakter zeigt.

Dafs die aufgestellten Forderungen durch manche andere ersetzt werden können, braucht wohl kaum bemerkt zu werden. Es handelt sich ja nur darum, die mehrfach genannte sechsgliedrige Gruppe, durch welche die starre Bewegung beschrieben wird, gegenüber den übrigen projektiven Gruppen einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu charakterisieren. Bei unserer Auswahl haben wir uns durch die hohe Bedeutung bestimmen lassen, welche der Kreis bei der gebräuchlichen Behandlung der Geometrie einnimmt. Vielleicht wäre es besser gewesen, direkt räumliche Transformationen in Betracht zu ziehen; für das passendste möchte ich es halten, die einschränkenden Forderungen in Zusammenhang mit den Untersuchungen des vierten Paragraphen zu bringen. Indessen würde das hier zu weit führen.

Die Übertragung der durchgeführten Untersuchung auf den mehr dimensionalen Raum dürfen wir wohl dem Leser überlassen.

§ 7.

Fanos Begründung der Projektivität.

Bei der Begründung der Projektivität macht die Beantwortung der Frage, ob zwei Gebilde gemeinschaftliche Elemente besitzen

an manchen Stellen lästige Erwägungen nötig, die zu der sonst hervortretenden Einfachheit wenig passen. Es lohnt sich daher zu untersuchen, ob die Kleinschen Voraussetzungen nicht in der Weise geändert werden können, dafs man sofort die Existenz gemeinsamer Elemente erkennt.

Nach dieser Richtung liegen zwei beachtenswerte Aufsätze vor, die beide von Herrn Segre angeregt und auch wohl beeinflufst sind; die Ausführung verdanken wir den Herren d'Amodeo und Fano.[14]) Dafs die ersten Versuche noch manche Mängel zeigen, darf uns nicht wundern; es fragt sich, ob die Arbeiten einen guten Kern enthalten, der eine weitere Ausbildung gestattet. Um den Leser zur Prüfung dieser Frage anzuregen, wollen wir das System des Herrn Fano in seinen Grundzügen darlegen.

Nur der Begriff des Punktes wird von vorn herein vorausgesetzt; alle anderen Begriffe werden entweder durch ein Postulat oder durch eine Definition eingeführt. An erster Stelle (I) wird die Gerade postuliert als ein geometrisches Gebilde, das durch zwei Punkte in eindeutiger Weise bestimmt ist. Ist eine Gerade und ein ihr nicht angehörender Punkt gegeben, so kann man durch jeden Punkt der Geraden und den festen Punkt eine Gerade legen: Die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Punkte wird eine Ebene genannt. Für das hierdurch eingeführte Gebilde sollen die Postulate gelten:

II. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemein hat;

III. Wofern zwei Gerade in derselben Ebene liegen, haben sie stets einen Punkt gemeinschaftlich.

Diese Voraussetzungen würden nichts Neues liefern, wenn die Gerade (1, 2) nur in der Zusammenstellung der Punkte 1 und 2, und infolge dessen die Ebene (1, 2, 3) in der Zusammenfassung der Punkte 1, 2, 3 bestände. Demnach wird die Voraussetzung (IV) hinzugefügt, dafs jede Gerade mehr als zwei Punkte enthält.

Sind jetzt A, B, C drei Punkte einer geraden Linie, so können wir auf dieselbe Weise, wie im zweiten Abschnitt (B. 1. S. 99—101), den vierten harmonischen Punkt finden und beweisen auf dem dort angegebenen Wege, dafs dieser Punkt von der Wahl der benutzten Ebenen und Geraden unabhängig ist.

Auch zeigt die Konstruktion, dafs vier Ebenen eines Büschels jede beliebige Gerade, die nicht durch die Achse geht, in vier harmonischen Punkten schneiden, sobald sie eine einzige Gerade in vier harmonischen Punkten treffen. Ebenso ergiebt sich unmittelbar, dafs man von irgend einer Gruppe von vier harmonischen Punkten zu jeder zweiten solchen Gruppe durch eine endliche Zahl von Projektionen und Schnitten übergehen kann.

Ist D der zu C in Bezug auf das Punktepaar AB zugeordnete harmonische Punkt, so zeigt die Konstruktion, dafs der Punkt D von den Punkten A und B verschieden ist; aber man bedarf ein neues Postulat, um zu erkennen, dafs die Punkte C und D nicht zusammenfallen. Wird dies Postulat für ein einziges Quadrupel aufgestellt, so gilt es infolge der angegebenen projektiven Zuordnung, die durch Projizieren und Schneiden vermittelt wird, für jedes andere Quadrupel. Aber hiermit ist die Zahl der unbedingt notwendigen Postulate keineswegs erschöpft, wie Fano durch eine interessante Untersuchung zeigt. Wir wollen den Beweis hier nicht vollständig wiedergeben, aber wenigstens einigermafsen charakterisieren.

Von drei Punkten OA_1A_2 einer Geraden ausgehend, sucht man eine unbegrenzte Reihe von weiteren Punkten A_3, A_4 ... A_n .. durch die Forderung, dafs jedesmal die vier Punkte $OA_\varkappa\ A_{\varkappa-1}\ A_{\varkappa+1}$ harmonische Punkte sind. Wenn in dieser Reihe irgend ein späterer Punkt mit einem früheren zusammenfällt, so bleibt die Reihe bei unbegrenzter Fortsetzung endlich; es fällt also ein Punkt A_{n+1} mit A_1 zusammen oder die Reihe kehrt nach n Elementen in sich zurück. Dann mufs die Zahl n eine Primzahl sein; die Gerade enthält $n+1$ Punkte, die Ebene n^2+n+1 Punkte und $n+1$ Gerade. Diese Gesetze gelten wegen der projektiven Zuordnung für jede Gerade und jede Ebene.

Soll also die Gerade unendlich viele Punkte enthalten, so müssen wir (Postulat V) voraussetzen, dafs in der oben definierten Reihe kein Element mit einem früheren zusammenfällt. Es genügt nicht, eine entsprechende Annahme für irgend eine noch so grofse endliche Zahl zu machen; da die Zahl der Primzahlen unendlich ist, so umfafst das letzte Postulat seinem Wesen nach unendlich viele Voraussetzungen in sich.

Die Festsetzung, dafs O, $A_\varkappa$, $A_{\varkappa-1}$, $A_{\varkappa+1}$ vier harmonische

Punkte sein sollen, gestattet, auch der Zahl null und jeder ganzen negativen Zahl einen Punkt zuzuordnen. Bei der Gültigkeit des fünften Postulats wird auch keiner der hierdurch gewonnenen Punkte mit einem anderen zusammenfallen. Die durch Projizieren und Schneiden gewonnene Zuordnung der Punkte nötigt uns auch, jeder rationalen Zahl einen Punkt in der Weise zuzuweisen, dafs zwei Punkte nur dann zusammenfallen, wenn gleiche Zahlen zu ihnen gehören. (Es ist dies, wie beiläufig bemerkt werden mag, dieselbe Zuordnung, die wir in II § 3. B. 1. S. 107 ff. dargelegt haben.)

Nachdem so für eine einzelne Gerade eine Messung eingeführt ist, hat man die Möglichkeit, unter Benutzung eines Koordinatensystems die Lage der Punkte durch Zahlen zu bestimmen. Hierbei ist man aber durchaus auf »rationale Punkte« beschränkt; will man zu Punkten übergehen, für welche einzelne Koordinaten irrationale Werte annehmen, so kommt man ohne ein neues Axiom nicht aus. Fano möchte am liebsten den Raum durch die »rationalen Punkte« erschöpft sein lassen und die »irrationalen« durch eine blofse Definition einführen; indessen wollen wir ihm auf dies Gebiet nicht folgen.

Wir bemerken nur noch, dafs er seine Theorie auf eine beliebig grofse Zahl von Dimensionen überträgt und dafs hierbei keine wesentliche Änderung notwendig wird.

Es scheint uns zweifellos, dafs diese Art der Begründung dem Leser Interesse abgewinnt; dagegen dürfte die Frage, ob das aufgestellte System von Voraussetzungen auf Natürlichkeit Anspruch machen kann, wohl kaum allgemein bejaht werden. Indem ich mich jeder Kritik enthalte, will ich zum Schlufs noch bemerken, dafs Herr Fano aufser dem Wege, den ich hier in seinen Grundzügen skizziert habe, noch einen zweiten Weg angiebt, der ebenfalls in voller Strenge zur Projektivität führen und den Vorzug der Kürze besitzen soll. Ich bin nicht sicher, ob ich diesen Teil seiner Arbeit vollständig richtig aufgefafst habe; wenn aber meine Auffassung die richtige ist, so mufs ich gestehen, dafs dieser zweiten Art, die Projektivität zu begründen, schwere Bedenken entgegenstehen.

§ 8.

Rückblick.

Als wichtigstes Ergebnis des zweiten und des sechsten Abschnittes, die wir hier im Zusammenhang überblicken wollen, müssen wir den Nachweis hinstellen, dafs sich die projektive Geometrie vollständig aufbauen läfst, ohne metrische Beziehungen im geringsten zu benutzen. Damit ist ein Problem endgültig gelöst, auf das die Wissenschaft in neuerer Zeit immer stärker hingeführt ist und das Staudt zuerst in voller Klarheit ausgesprochen und dessen Lösung er bereits kräftig gefördert hat. Es wird gut sein, nochmals die einzelnen Teile, aus denen sich der Nachweis aufbaut, in aller Kürze anzugeben.

Die Sätze, von denen die projektive Geometrie ausgeht, sind ohne Zweifel sehr einfach. Sie bilden auch insofern ein abgeschlossenes Ganze, als es nicht möglich ist, sie auf ein geringeres Mafs zurückzuführen. Die zu Grunde gelegten Sätze gelten aber nicht blofs für die (etwa erfahrungsgemäfs gegebenen) Ebenen und Geraden des Raumes, sondern auch für zahlreiche andere Systeme von Linien und Flächen. Demnach lassen sich auch die Sätze der projektiven Geometrie auf mancherlei Systeme von Flächen und Linien übertragen. Wie in der metrischen, ist es auch in der projektiven Geometrie am besten, sich anfangs ganz auf einen gewissen endlichen Bereich zu beschränken und nicht von vornherein den Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde zu legen (VI § 1).

Bekanntlich beweist dieser Zweig der Geometrie seine Lehrsätze vermittelst der projektiven und im weiteren Verlauf vermittelst der kollinearen und der reciproken Zuordnung. Dafs die letzte Verwandtschaft in unserer Darlegung, wenigstens äufserlich, zurücktritt, darf uns nicht überraschen, da wir nur die Grundlagen darlegen konnten, für den weiteren Ausbau aber auf die Lehrbücher verweisen mufsten. Der einfachste Fall der Projektivität, die Perspektivität, führt uns auf die harmonischen Gebilde (II § 2). Nun genügt freilich nach Staudt die Theorie der harmonischen Gebilde, um die Projektivität allgemein zu begründen. Indessen mufs man zu dem Zweck den Satz benutzen, dafs man von irgend drei Punkten einer Geraden aus durch blofse Konstruktion des

vierten harmonischen Punktes allmählich jedem Punkte der Geraden beliebig nahe kommen kann. Beim Beweise dieses Satzes wird man aber Untersuchungen nicht entbehren können, die uns gestatten, die Theorie der Doppelverhältnisse vollständig durchzuführen, wie wir es in II § 3 gethan haben. Hierbei tritt uns aber dieselbe Schwierigkeit entgegen, welche in der metrischen Geometrie die Messung der geraden Strecke augenblicklich noch bietet. Wir konstatieren aber ausdrücklich, dafs dies die einzige Lücke ist, welche noch nicht ganz hat ausgefüllt werden können; auch berechtigen die vielen Vorarbeiten, welche diesem Gegenstande in der letzten Zeit gewidmet sind, zu der Erwartung, dafs der Abschlufs dieser Untersuchungen nahe bevorsteht.

Nachdem die Doppelverhältnisse eingeführt sind, kann man die projektive Geometrie rein synthetisch aufbauen (II § 4). Es war für uns nicht nötig, dies im einzelnen durchzuführen; es genügte vielmehr, auf Reyes »Vorlesungen über die Geometrie der Lage« zu verweisen. Man hat aus diesem Werke nur die Partieen metrischen Charakters auszuschliefsen und die kleinen Änderungen vorzunehmen, welche dadurch bedingt sind, dafs Reye von vornherein den Raum als Ganzes untersucht, wir aber anfänglich nur einen endlichen Bereich betrachten.

Um die Geometrie eines endlichen Bereiches zum Abschlufs zu bringen, hat man den Begriff des Strahlenbündels in der Weise zu erweitern, die wir in VI § 2 dargelegt haben. Der Ausspruch der dort gewonnenen Sätze wird besonders einfach, wenn man die sogenannten idealen Gebilde einführt. Zwar mufs man, wenn man diese Ausdrücke gebraucht, bei Erweiterung des Gebietes einige Vorsicht anwenden; das mindert aber nichts an dem Interesse, welches die gefundenen Sätze für sich beanspruchen.

Zugleich führt die Benutzung der idealen Gebilde in einfachster Weise zu einer projektiven Raumform, die deshalb besonders wichtig ist, weil die für einen endlichen Raumteil zu Grunde gelegten Annahmen für den Raum als Ganzes möglichst ungeändert bleiben. In derselben haben nämlich irgend zwei Ebenen eine Gerade und zwei in derselben Ebene gelegenen Geraden stets einen Punkt gemein; natürlich kann dann der Raum nicht durch eine Ebene zerlegt werden. Diese Raumform wird vielfach als die einzige projektive Raumform angesehen. Wenn

das auch nicht erlaubt ist, so bietet sie doch das geeignetste Mittel, um auch die übrigen projektiven Raumformen synthetisch zu beschreiben.

Neben die synthetische stellt sich die analytische Behandlung der projektiven Geometrie, die wir aus vielen Gründen glauben bevorzugen zu sollen (II § 5 u. 6). Die kollinearen Zuordnungen stellen sich durch homogene lineare Gleichungen zwischen den homogenen Koordinaten dar (VI § 1, 8). Besonders praktisch erweist sich die analytische Behandlung, um die verschiedenen projektiven Raumformen zu charakterisieren. Unter ihnen beanspruchen zwei ein hervorragendes Interesse (VI § 3).

So können wir denn sagen: Von überaus einfachen Voraussetzungen aus läfst sich die ganze projektive Geometrie in einer Weise aufbauen, die im wesentlichen strenge Konsequenz mit voller Natürlichkeit vereinigt. Zwar will es uns scheinen, als ob den zu Grunde gelegten Annahmen noch eine gewisse Willkür anhafte; auch bietet das System in seinem Aufbau noch eine Lücke. Aber die Vorzüge dieser Behandlungsweise überwiegen in einem solchen Mafse, dafs die kleinen Mängel höchstens zu dem Versuche anregen können, die Methode noch weiter zu vervollkommnen. Diejenigen Partieen, welche man heute vielfach als transcendent bezeichnet, werden auf ein äufserst geringes Mafs eingeschränkt. Nun liegen bereits Methoden vor, welche darauf ausgehen, solche Teile ganz aus der projektiven Geometrie zu entfernen. Wir können uns der Meinung nicht verschliefsen, dafs hierbei die Natürlichkeit ganz verloren geht, dafs also der Nachteil bei weitem überwiegt. Dennoch haben wir einen derartigen Versuch in seinen Hauptzügen gekennzeichnet (VI § 7).

Indessen hat die projektive Geometrie nicht blofs an sich hohe Bedeutung, sondern sie kann auch für die Metrik nutzbar gemacht werden. Ich erinnere an die Herleitung der Formeln für die Metrik, welche wir in II §§ 7—9 und in VI § 5 gegeben haben. Diese Entwicklung ist zwar nicht so einfach wie diejenige, welche wir in I §§ 24 u. 25 liefern konnten; aber dafür hat sie viele Vorzüge anderer Art.

Für besonders wichtig erachten wir es aber, dafs wir ganz unabhängig von allen metrischen Voraussetzungen ein System von Begriffen und Urteilen angeben können, das vollständig der

metrischen Geometrie entspricht. Hierin erblicken wir geradezu einen principiellen Vorzug der Projektivität. Im fünften Abschnitt erkannten wir nämlich, welche Bedeutung die Kongruenz für die Geometrie hat; wir mufsten es deshalb für erlaubt halten, die Bewegung fester Körper unter die Grundbegriffe der Geometrie aufzunehmen. Ja, die dort durchgeführte Untersuchung konnte den Schein erwecken, als ob die Bewegung notwendig zu den Grundbegriffen gehöre, und als ob man gezwungen sei, die Gesetze der Bewegung zu benutzen, wenn man eine feste Grundlage für die Geometrie schaffen will. Die projektive Geometrie zeigt, dafs die letzte Ansicht unrichtig ist, da sich uns noch manche andere Wege eröffnen, auf denen wir in voller Strenge und sogar mit grofser Leichtigkeit zum Ziel gelangen.

Von diesen Wegen haben wir drei in voller Ausführlichkeit besprochen, und diese sollen hier nochmals charakterisiert werden.

Der erste läfst sich am einfachsten darlegen, wenn wir von der bereits mehrmals erwähnten projektiven Raumform ausgehen, in welcher jedem Verhältnis der vier homogenen Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ein Punkt, und zwar ein einziger Punkt zugeordnet ist. In dieser Raumform denken wir eine reelle ungeradlinige oder eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung gegeben, indem wir uns im ersten Falle auf das Innere der Fläche beschränken. Zwei beliebige Punkte des Raumes verbinden wir durch eine gerade Linie und bestimmen ihre Schnittpunkte mit der Fläche. Den mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, in dem die beiden gegebenen Punkte zu den Schnittpunkten stehen, nennen wir den Abstand der beiden Punkte. Ebenso legen wir durch die Schnittgerade zweier Ebenen die beiden Tangentialebenen an die Fläche; den Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser vier Ebenen multiplizieren wir mit einer gewissen Konstante und nennen das Produkt den Winkel der beiden ersten Ebenen. Die Werte dieser Doppelverhältnisse lassen sich immer angeben, obwohl die Tangentialebenen stets und die Schnittpunkte im einen Falle imaginär sind. Gründet man auf die so gewonnenen Begriffe ein System, so entspricht demselben für eine reelle Fläche die hyperbolische, für eine imaginäre Fläche die elliptische Geometrie; die parabolische Geometrie ist die

gemeinsame Grenze, der sich beide Systeme bei passender Veränderung einer gewissen Gröfse unbegrenzt nähern.

Statt auf diese Weise die Längen und Winkel direkt einzuführen, kann man sich auf solche projektive Transformationen beschränken, bei denen die gegebene Fläche in sich verbleibt. So führt folgende Festsetzung zur elliptischen Geometrie. Man ordnet durch eine reciproke Verwandtschaft jedem Punkte eine Ebene derartig zu, dafs kein Punkt in die entsprechende Ebene hineinfällt. Jetzt beschränken wir die kollinearen Umgestaltungen des Raumes durch die Forderung, dafs jedesmal, wenn ein Punkt α in einen Punkt α_1 übergeführt wird, auch die dem Punkte α entsprechende Ebene in die zu α_1 zugeordnete Ebene umgewandelt wird. Durch eine ähnliche Festsetzung gelangt man zur hyperbolischen Geometrie.

Demnach dürfen wir auch sagen: Wir betrachten nur diejenigen kollinearen Transformationen des Raumes, welche eine gegebene quadratische Form der Koordinaten ungeändert lassen. Ist es möglich, diese Form durch vier positive (oder vier negative) Quadrate darzustellen, so erhält man einen elliptischen Raum. Haben aber drei Quadrate ein anderes Vorzeichen als das vierte, so gelangt man zur hyperbolischen Geometrie. Die letzte Forderung zeigt, dafs es nicht nötig ist, den projektiven Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde zu legen, dafs es vielmehr genügt, irgend einen endlichen Bereich zu betrachten. Wir haben diese Methode in II § 10 u. 11 ausführlich dargelegt.

So schön dieser Übergang von der Projektivität zur Metrik ist, hat er doch einige Mängel. Erstens kann die parabolische Geometrie nicht genau auf demselben Wege definiert werden wie die beiden anderen. Zweitens liefert die Theorie keinen erkennbaren Grund, warum die geradlinigen Flächen ausgeschlossen werden oder warum das Innere der Fläche vor dem Äufseren bevorzugt wird.

Demnach ist es erwünscht, andere Wege angeben zu können, die zu demselben Ziele führen. Dafs dabei die Theorie der Transformations-Gruppen benutzt wird, ist kein Mangel, erschwert aber, solange diese Theorie nicht allgemein bekannt ist, vielfach das Verständnis.

Der in VI § 4 angegebene Übergang von der Projektivität

zur Metrik geht von folgender Erwägung aus. Die kollinearen Umgestaltungen in ihrer Gesamtheit setzen jeden Punkt, jede Gerade und jede Ebene in Beziehung zu jedem Punkte, jeder Geraden und jeder Ebene. Es mufs daher als eine wesentliche Eigenschaft der allgemeinen projektiven Gruppe betrachtet werden, dafs sie nicht nur jeden Punkt in einen beliebigen Punkt, sondern auch jede Gerade und Ebene in eine beliebige Gerade und Ebene überführt. Will man demnach eine Beschränkung einführen, so liegt nichts näher, als die Forderung bestehen zu lassen, dafs wenigstens für einen gewissen Bereich alle Punkte, Geraden und Ebenen in einander transformiert werden können; man kann mit anderen Worten nach der kleinsten projektiven Gruppe fragen, welche dieser Forderung genügt. Dabei tritt die Vereinfachung ein, dafs man sich auf Ebenen beschränken darf, dafs man also nur die Forderung zu stellen braucht: Von der allgemeinen projektiven Gruppe des dreidimensionalen Raumes soll die kleinste Untergruppe gesucht werden, welche im stande ist, eine Ebene in jede andere zu transformieren, die mit ihr in einem festgewählten Bereiche liegt.

Um demnach zur Metrik überzugehen, wähle man einen Bereich ganz beliebig und bestimme die kleinste projektive Gruppe, deren Transformationen im stande sind, eine Ebene, welche teilweise in diesem Bereiche liegt, in jede andere Ebene überzuführen, welche teilweise demselben Bereiche angehört. In der Darstellung dieser Untergruppe tritt eine willkürliche Konstante auf, deren Verschwinden auf die parabolische Geometrie führt. Wählt man die Konstante so, dafs sie für die elliptische Geometrie positiv ist, so erhält sie für die hyperbolische Geometrie einen negativen Wert (VI § 4).

Von der Projektivität kann man auf einem dritten Wege zur Metrik übergehen, indem man nämlich den Transformationen, die einen Punkt und eine durch ihn hindurchgehende Ebene ungeändert lassen, eine gewisse Beschränkung auferlegt (VI § 6). Auch diese Methode liefert nur diejenigen Raumformen, die mit der Erfahrung vereinbar sind. Zugleich nähert sich dieser Weg in seiner äufsern Form der Metrik und beantwortet die Frage: Welche Eigenschaften mufs man mindestens der starren Bewegung noch beilegen, wenn man annimmt, dafs durch dieselbe das

System der Geraden und Ebenen nicht geändert wird? Es zeigt sich, daſs die Beschränkung im wesentlichen darauf hinauskommt, die Existenz zweier Kreise vorauszusetzen.

Dieser kurze Überblick zeigt, welch hohe Bedeutung der projektiven Geometrie zukommt. Indessen belehren uns die zahlreichen Versuche, welche in den letzten Jahrzehnten gemacht sind, um die Existenz der Geraden und Ebenen aut andere Principien zurückzuführen, daſs es vielen Geometern nicht recht gefällt, diese Gebilde axiomatisch vorauszusetzen. Hiernach scheint es geboten, in den beiden folgenden Abschnitten wieder an die früheren Entwicklungen, speciell an die des fünften Abschnitts, anzuknüpfen.

Siebenter Abschnitt.

Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.

§ 1.

Vorbemerkungen.

1. Die folgenden Darlegungen wollen in diejenigen Begriffe einführen, welche wir als die Grundbegriffe der Geometrie ansehen. Dafs wir dabei auch die Gerade und die Ebene, sowie den Winkel besprechen, bedarf wohl keiner Rechtfertigung. Zwar ist die Theorie dieser Gebilde noch nicht zum vollen Abschlufs gebracht; aber es mufs zur Klärung beitragen, wenn wir die wichtigsten Definitionen, welche darüber aufgestellt sind, zusammenstellen und einige kritische Bemerkungen beifügen. Eine absolute Vollständigkeit können wir nicht erstreben, da alsdann der Umfang des Buches zu sehr anwachsen würde; sie ist aber auch um so weniger notwendig, da wir den Leser auf das sorgfältig durchgeführte Werk verweisen können: Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, das in zwei Bänden erschienen ist (Leipzig 1890 und 1893). Da hierin regelmäfsig angegeben ist, von welchen Gelehrten die verschiedenen Definitionen hauptsächlich vertreten werden, brauchen wir dies hier nicht jedesmal zu erwähnen.

Ehe wir zu unserm eigentlichen Gegenstande übergehen, möchten wir einige Bemerkungen vorausschicken.

2. Die Gerade kann man nach drei verschiedenen Beziehungen hin betrachten, und man ist übereingekommen, dementsprechend drei verschiedene Worte zu gebrauchen: (gerade) Strecke, Strahl oder Halbgerade, gerade Linie. Wenn man von einer Strecke spricht, setzt man beide Endpunkte als gegeben voraus, so dafs

das Gebilde kein veränderliches Element enthält; der Strecke kommt eine bestimmte Lage im Raume und eine bestimmte Länge zu. Wenn man aber von der Strecke AB den einen Endpunkt A festhält und es als zulässig ansieht, dafs der Punkt B ersetzt werde bald durch einen in der Strecke AB gelegenen Punkt C, bald durch einen Punkt D, der so liegt, dafs die Strecke AB in der Strecke AD enthalten ist, so spricht man vom Strahle oder von der Halbgeraden AB.*) Man sagt auch wohl, durch den Strahl AB solle eine gewisse vom Punkte A ausgehende Richtung bezeichnet werden. In der Euklidischen und der Lobatschewskyschen Raumform kann man die Strecke AB über B hinaus unbegrenzt verlängert denken, während der Punkt A festgehalten wird; das fällt in der Riemannschen Geometrie, ihrer Polarform und den meisten Clifford-Kleinschen Raumformen weg.

Drittens kann man bei einer Strecke AB von beiden Endpunkten absehen und gestatten, dafs sie durch irgend zwei Punkte ersetzt werden, die entweder auf der Strecke AB oder in der Verlängerung über A oder über B hinaus liegen. Um dies anzudeuten, spricht man von der geraden Linie AB. Demnach gehören zwei verschiedene Strecken AB und CD derselben geraden Linie an, wenn es eine dritte Strecke giebt, in der die beiden gegebenen Strecken enthalten sind.

3. Ganz entsprechende Unterscheidungen hat man bei der Ebene zu machen; nur ist die Zahl der einzelnen Fälle unendlich grofs. Indessen lassen sich dieselben wieder zu drei Klassen anordnen. An erster Stelle können wir eine allseits begrenzte ebene Fläche betrachten, wie das Innere eines Dreiecks oder eines Kreises. Zweitens gestatten wir eine Erweiterung des Gebietes, indem wir einen Teil der Grenze als fest oder doch nur insoweit als veränderlich ansehen, dafs derselbe stets einer bestimmten Linie angehört. In diesem Sinne sprechen wir vom Äufsern eines Kreises; dabei denken wir an ein ebenes Flächenstück, welches zum Teil

*) Das Wort Strahl drückt wegen der Beziehung zu der von einem Punkte ausgehenden Lichtwelle, die sich unbegrenzt fortsetzen kann, die hier in Betracht kommende Eigenschaft besonders scharf aus; dafs das Wort in der projektiven Geometrie eine andere Bedeutung erlangt hat, ist nicht gerade angenehm, kann aber kein Hindernis bieten, ihm in der metrischen Geometrie den obigen Sinn beizulegen, da ein Mifsverständnis nicht zu befürchten ist.

von einer gegebenen Kreislinie begrenzt wird und dessen übrige Begrenzung sich beliebig ändern kann. Bei der Halbebene denken wir eine Gerade unbegrenzt verlängert und verlangen, dafs auch die Verlängerung stets die Grenze sein soll. Diese Forderung können wir schärfer in folgender Weise aussprechen: Wir betrachten zwei ebene Flächen α und β als derselben Halbebene angehörig, wenn ein Teil der Grenze von α durch eine gewisse Strecke AB, ein Teil der Grenze von β durch eine Strecke CD gebildet wird, wenn diese Strecken in dem oben angegebenen Sinne derselben Geraden angehören, keine in dieser Geraden enthaltene Strecke in das Innere einer der beiden Flächen fällt, und wenn man endlich eine ebene Fläche bestimmen kann, der die beiden gegebenen Flächen als Teile angehören.

Endlich kann man die Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung betrachten. Man geht von einem ebenen Flächenstück A aus, nimmt ein zweites A_1 hinzu, welches einen Teil mit A gemeinschaftlich hat, aber zum Teil über dasselbe hinausgeht; eine weitere ebene Fläche A_2 falle wiederum zum Teil mit A_1 zusammen u. s. w.; auf diese Weise möge man zu einer ebenen Fläche B gelangen, die mit einem vorher gefundenen Flächenstück A_n einen Teil gemeinsam hat; alsdann betrachten wir die ebenen Flächen A und B als derselben Ebene angehörend. Hierbei sieht man ganz von der Begrenzung ab und verlangt nur, dafs die einzelnen Teile durch Erweiterung des Gebietes in einander übergeführt werden können. Meistens genügt folgende Festsetzung: Die ebenen Flächen A und B sollen derselben Ebene angehören, wenn es ein drittes ebenes Flächenstück giebt, dem sowohl die Fläche A wie die Fläche B als Teile angehören.

§ 2.

Der Winkel.

1. Für den Anfang der Geometrie genügt es, nur solche Winkel zu betrachten, die kleiner sind als zwei Rechte. Auch im weiteren Verlauf wird diese Beschränkung stets festgehalten, wofern nicht der Zusammenhang oder eine ausdrückliche Festsetzung es anders verlangt. Da man zudem den allgemeinsten Begriff des Winkels leicht herleiten kann, sobald man den ur-

sprünglichen Begriff entwickelt hat, so genügt es für unsern Zweck, was im folgenden stets geschehen soll, sich auf den nächsten Begriff des Winkels zu beschränken. Das thun auch alle diejenigen, welche den Winkel als »die Neigung zweier Geraden zu einander« oder als den »Unterschied ihrer Richtungen« definieren. Indessen ist diese Form ungenau, da zwei gerade Linien vier Winkel mit einander bilden, die sich allerdings zu zwei Paaren gleicher Winkel anordnen. Man mufs also von der Neigung zweier Halbgeraden (Strahlen) sprechen, die den Endpunkt gemeinsam haben. Jedoch hat man hiermit keine eigentliche Definition gegeben, da man den zu erklärenden Begriff auf einen anderen Begriff zurückführt, der selbst nicht näher erklärt wird. Damit soll nicht geleugnet werden, dafs es beim Unterrichte angebracht ist, diesen Ausdruck zur Erläuterung heranzuziehen, da dem Schüler klar gemacht werden mufs, dafs es für den Winkel nicht auf die Länge der Schenkel ankommt.

Man erklärt auch den Winkel als eine Figur, welche aus zwei in demselben Punkte begrenzten Strahlen besteht. Wenn man diese Erklärung aufstellt, mufs man beachten, dafs der Raum unbeweglich ist und dafs damit auch die Raumgebilde so lange unveränderlich sind, als man nur ihre Lage im Raume betrachtet. Zwar liebt man es vielfach, nur den Strecken eine unveränderliche Länge beizulegen, aber Strahlen beliebige Drehungen um ihren Endpunkt zu gestatten und die feste Lage erst durch die Hinzunahme weiterer Linien herbeizuführen. Eine derartige Festsetzung ist aber rein willkürlich; vielmehr hat der einzelne Strahl bereits eine feste Lage, die man natürlich durch Bewegung verändern kann. Sobald man von der Neigung zweier Strahlen spricht, fafst man zum mindesten ihre gegenseitige Lage als unveränderlich auf. Demnach enthält der Begriff der aus zwei Strahlen bestehenden Figur alles, was man mit dem Worte Neigung ausdrücken will.

2. Reicher wird indessen der Begriff des Winkels, wenn man die durch die Schenkel gelegte Ebene hinzunimmt. Diese Ebene wird durch die Schenkel in zwei Teile zerlegt. Um diese von einander zu unterscheiden, wähle man auf dem einen Schenkel einen Punkt A, auf dem anderen einen Punkt B; dann liegt die Strecke AB in einem der beiden Teile. Dieser Teil ist, wie man

leicht beweist, unabhängig davon, welche Punkte man auf den beiden Schenkeln gewählt hat. Demnach ist es angebracht, diesen Teil zu bevorzugen und als Winkelfeld zu bezeichnen. (Wie man diese Erklärung für die Riemannsche Geometrie, ihre Polarform und die Clifford-Kleinschen Raumformen umgestalten mufs, bedarf wohl keiner nähern Auseinandersetzung.)

Bei dieser Festsetzung gilt der Satz, dafs Winkel, deren Schenkel zusammenfallen, auch dasselbe Winkelfeld haben. Auch liegt es nahe, von zwei Winkelfeldern, die denselben Scheitel haben und von denen das eine einen Teil des andern bildet, das eine als das kleinere, das andere als das gröfsere zu bezeichnen. Dieser Ausdruck ist berechtigt, da die bestimmende Eigenschaft bei Erweiterung des Gebiets unverändert bleibt. Man darf die entsprechende Bezeichnung auch auf die Winkel selbst übertragen und sie als gleich, gröfser und kleiner unterscheiden. Will man zwei Winkel nach ihrer Gröfse mit einander vergleichen, so legt man sie mit dem Scheitel und dem einen Schenkel über einander (in dieselbe Halbebene); dadurch wird die Vergleichung ermöglicht, und man erkennt, dafs zwei beliebige Winkel entweder einander gleich sind, oder dafs der eine gröfser ist als der andere.

3. Die Messung des Winkels gehört an sich wohl nicht in den Anfang des geometrischen Unterrichts, sondern an eine viel spätere Stelle. Indessen empfiehlt es sich aus mancherlei Gründen, den Schüler recht früh im Gebrauch des Transporteurs zu üben und diejenigen Sätze anzugeben, auf die sich dies Instrument stützt.

Will man aber, was für manche Untersuchungen genügt, die Winkel nur nach gleich, gröfser und kleiner vergleichen, so bedarf man der Ebene nicht; es genügt, die beiden Sätze zu benutzen, dafs eine Drehung um eine Gerade möglich ist, und dafs diese soweit fortgesetzt werden kann, bis jeder Punkt seine Anfangslage wieder erreicht. Dreht man einen Winkel AOB um den einen Schenkel OA, so beschreibt der andere eine Fläche, welche zwei Teile des Raumes gegen einander abgrenzt. Einen zweiten Winkel CQD legt man so, dafs der Punkt Q auf O und der Strahl QC auf OA fällt; gehört dann der Punkt D der Fläche an, so werden die Winkel als gleich bezeichnet, weil sie mit einander zur Deckung gebracht werden können; wenn aber der

Punkt D in denjenigen Raumteil fällt, in dem der ruhende Strahl OA liegt, so soll der Winkel CQD kleiner sein als AOB.

Um diese Festsetzung als berechtigt nachzuweisen, hat man nur die Grundeigenschaften der geraden Linie und einige Sätze über die Bewegung, oder wenn man lieber will, einige Eigenschaften der Kugel zu benutzen; dagegen werden die Eigenschaften der Ebene nicht vorausgesetzt.

4. Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben, während die anderen derselben geraden Linie angehören, werden Nebenwinkel genannt; wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, so heifst jeder von ihnen ein Rechter. Die Frage, ob es rechte Winkel giebt, beantwortet Euklid durch eine Konstruktion. Dabei werden aber, wie wir früher (V § 8 S. 41) hervorgehoben haben, einige Sätze benutzt, die sich auf das Princip der Stetigkeit stützen; es ist demnach gestattet, die Existenz des rechten Winkels direkt aus diesem Princip herzuleiten.

Man gehe von den beiden Nebenwinkeln AOC und BOC aus, wo OA und OB entgegengesetzte Richtung haben. Sind diese gleich, so ist jeder ein Rechter; ist aber etwa AOC $<$ BOC, so ziehe man im Winkelfelde BOC einen Strahl OD so, dafs BOD = AOC ist; dann ist auch AOD = BOC. Läfst man jetzt einen Strahl OX sich in der Ebene um O aus der Lage OC in die Lage OD drehen, so ist bei Beginn der Bewegung der Winkel AOX kleiner als BOX, am Ende der Bewegung aber AOX gröfser als BOX; folglich mufs OX während der Bewegung eine Lage annehmen, in der die beiden Winkel einander gleich sind. Hiermit ist die Existenz des rechten Winkels bewiesen.

Es ist nicht nötig, bei dieser Herleitung die Ebene zu benutzen. Wenn die beiden Nebenwinkel AOC und BOC gegeben sind, so genügt es, den Strahl OD so zu ziehen, dafs BOD=COA ist, und im übrigen seine Lage willkürlich zu lassen. Geht jetzt der Strahl OX aus der Lage OC in die Lage OD stetig über, so mufs er mindestens einmal eine Lage annehmen, in welcher AOX = BOX ist.

5. Euklid verlangt in seinem vierten Postulat, dafs alle rechten Winkel einander gleich sind. Dies Postulat wird, soweit ich übersehen kann, von keiner Seite mehr als solches anerkannt; nur Herr Lindemann[15]) glaubt es retten zu sollen. Dieser Gelehrte

geht von folgender Überlegung aus: Wenn jemand von der starren Bewegung voraussetzt, dafs sie alle Geraden und Ebenen in einander überführt und zugleich alle Längen und Winkel unverändert läfst, so legt er mehr Voraussetzungen zu Grunde als notwendig sind, weil die hierbei angenommenen Eigenschaften zum Teil blofse Folgerungen aus den übrigen sind. Seines Erachtens genügt es, ohne Beweis anzunehmen, a) dafs alle Geraden und Ebenen in einander übergeführt werden können, b) dafs alle Längen ungeändert bleiben, und c) dafs alle rechten Winkel zur Deckung gebracht werden können. Wenn eine Bewegung diesen Forderungen genügt, so bleiben bei ihr auch, wie rein projektive Untersuchungen zeigen, alle Winkel ungeändert.

Demnach bezeichnet er es als unlogisch, »die einfacheren Grundsätze Euklids durch umfassendere Folgesätze zu ersetzen.« Diejenigen, welche den Begriff der starren Bewegung in voller Allgemeinheit voraussetzen, begehen nach seiner Ansicht denselben Fehler, wie diejenigen, welche etwa ein gleichschenkliges Dreieck als ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten und zwei gleichen Winkeln definieren wollten, da sie in die Definition Eigenschaften mit aufnehmen, welche blofse Folgerungen aus den übrigen Eigenschaften sind. Demnach stellt er das vierte Postulat Euklids geradezu neben die Annahme Riemanns von der Konstanz des Krümmungsmafses.

Lindemann übersieht aber hierbei, dafs er dem griechischen Mathematiker, den er verteidigen will, dem er sogar eine Ahnung der Kleinschen Entdeckungen beilegen möchte, einen logischen Fehler imputiert. Die starre Bewegung soll dadurch charakterisiert werden, dafs bei ihr die rechten Winkel ungeändert bleiben; der rechte Winkel wird definiert (Def. 10) als ein solcher, der seinem Nebenwinkel gleich ist; die Gleichheit wird erst durch die Möglichkeit der Deckung erkannt (Axiom 4), diese aber durch starre Bewegung vermittelt. Demnach setzt die Definition des rechten Winkels bereits die starre Bewegung voraus, während die letztere selbst erst durch die Gleichheit der rechten Winkel definiert werden soll. Ein derartiger Zirkel ist aber weit schlimmer als eine Definition, die sich nicht mit den unbedingt notwendigen Merkmalen begnügt.

Übrigens verfällt hier Lindemann in denselben Fehler, den

er anderen vorwirft, indem er annimmt, dafs neben den Axiomen der Geraden, der Ebene und des Kreises, also neben den von Euklid in seiner vierten, siebenten und fünfzehnten Definition gemachten Voraussetzungen noch sein viertes Postulat notwendig sei. Wie wir in II § 7—9 (B. 1. S. 128—149) und in VI § 5 (S. 129 ff.) nachgewiesen haben, gestatten die Axiome der Geraden, der Ebene und des Kreises, den Winkel einzuführen und zu zeigen, dafs jede Bewegung, welche den genannten Axiomen genügt, die Winkel ungeändert läfst. Die Forderung, den rechten Winkel wieder in einen rechten Winkel überzuführen, ist also überflüssig.

Wir haben sogar bedeutend weiter gehen können, indem wir in VI § 6 (S. 153 ff.) zur Charakterisierung der starren Bewegung neben der Annahme, dafs alle Ebenen wieder in Ebenen übergehen, nur die Existenz zweier Kreise voraussetzten. Auch hierbei stellt sich die Erhaltung der Gröfse des Winkels als eine Folgerung aus den Prämissen heraus. So sehr wir es daher Herrn Lindemann als Verdienst anrechnen, darauf hingewiesen zu haben, dafs es nach Einführung der Geraden und der Ebene nicht mehr notwendig ist, axiomatisch vorauszusetzen, dafs alle Gröfsenbeziehungen bei der starren Bewegung erhalten bleiben, müssen wir doch seinen Versuch, das vierte Postulat Euklids als berechtigt nachzuweisen, als mifslungen bezeichnen.

Eine derartige Beschreibung der starren Bewegung ist indessen nur möglich, wenn man von der Projektivität ausgeht und das System der Geraden und Ebenen axiomatisch voraussetzt. Will man aber diese Gebilde aus allgemeineren Principien herleiten, so kann man den Begriff der starren Bewegung in seinem vollen Umfange nicht entbehren. In diesem Falle baut sich nämlich die Geometrie wesentlich auf diesem Begriffe auf, und es versteht sich von selbst, dafs ein Begriff, der einem solchen Lehrgebäude als Grundlage dient, einen reichen Inhalt haben mufs.

§ 3.

Über die Ebene und die Gerade als Raumgebilde.

1. Eine wahrhaft musterhafte Darlegung aller Voraussetzungen, welche über die Gerade und die Ebene gemacht werden müssen, wenn man daraus die weiteren Eigenschaften in voller Strenge

herleiten will, giebt Pasch in seinen Vorlesungen über die neuere Geometrie. Darin geht er von der (geraden) Strecke und entsprechend von der ebenen Fläche aus und gelangt erst allmählich zur unbegrenzten Gerade und zur Ebene. Seine Methode ist dadurch charakterisiert, dafs keine Definitionen aufgestellt, sondern nur hinreichend viele Eigenschaften der Gebilde vorausgesetzt werden. Demnach stellt er über die Gerade acht und über die Ebene vier Grundsätze auf. Es wird gut sein, dieselben hier mitzuteilen.

a) Grundsätze über die Gerade:

1. Zwischen zwei Punkten kann man stets eine gerade Strecke ziehen, und zwar nur eine.

2. Man kann stets einen Punkt angeben, der innerhalb einer gegebenen geraden Strecke liegt.

3. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so liegt der Punkt A aufserhalb der Strecke BC.

4. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so sind alle Punkte der Strecke AC zugleich Punkte der Strecke AB.

5. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so kann ein Punkt, der keiner der Strecken AC und BC angehört, nicht zur Strecke AB gehören.

6. Sind A und B beliebige Punkte, so kann man den Punkt C so wählen, dafs B innerhalb der Strecke AC liegt.

7. Liegt der Punkt B innerhalb der Strecken AC und AD, so liegt entweder der Punkt C innerhalb der Strecke AD, oder der Punkt D innerhalb der Strecke AC.

8. Liegt der Punkt B innerhalb der Strecke AC und der Punkt A innerhalb der Strecke BD, und wird CD durch eine gerade Strecke verbunden, so liegt der Punkt A auch innerhalb der Strecke CD.

b) Grundsätze über die Ebene:

1. Durch drei beliebige Punkte kann man eine ebene Fläche legen.

2. Wird durch zwei Punkte einer ebenen Fläche eine gerade Strecke gezogen, so existiert eine ebene Fläche, welche alle Punkte der vorigen und auch die Strecke enthält.

3. Wenn zwei ebene Flächen E, E′ einen Punkt gemein haben, so kann man einen anderen Punkt angeben, der sowohl

mit allen Punkten von E, als auch mit allen Punkten von E' je in einer ebenen Fläche enthalten ist.

4. Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte A, B, C durch die geraden Strecken AB, BC, AC paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke DE durch einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

Diese Voraussetzungen gestatten, die projektiven Eigenschaften herzuleiten; um aber die Metrik zu begründen, werden zehn weitere Grundsätze beigefügt.

Die grofse Zahl dieser Voraussetzungen kann auf den ersten Blick auffallend erscheinen; aber man berücksichtige, dafs hier alle diejenigen Sätze aufgenommen sind, welche gewöhnlich aus den Principien der Teilung, der Stetigkeit u. s. w. hergeleitet werden. So kann der zweite Grundsatz über die Gerade auch die Form erhalten:

Man kann die Strecke in zwei Teile zerlegen; der Punkt, der die Grenze dieser Teile bildet, gehört der Strecke an.

Überhaupt wenden die Grundsätze 3, 4, 5, 7, 8 über die Gerade das Princip der Teilung auf die Strecke an, während der Grundsatz 6 die Verlängerung der Strecke begründet. Der vierte Grundsatz über die Ebene kommt auf das Princip der Stetigkeit hinaus.

Nun ist es gewifs sehr anzuerkennen, dafs alle Voraussetzungen, welche in dem genannten Werke benutzt werden, auf den ersten Seiten in solcher Vollständigkeit und Klarheit aufgestellt werden; aber es fragt sich, ob sie als Grundlagen der Geometrie genügen. Ehe man diese Frage bejaht, versuche man diejenigen Sätze, welche über die Gerade und die Ebene hinausgehen, mit gleicher Strenge herzuleiten. Ich will hier nur an die synthetische Begründung der Kegelschnitte vermittelst projektiver ebener Strahlenbündel erinnern. Hier kommt es doch wohl an erster Stelle darauf an, zu erkennen, dafs vermittelst dieser Konstruktion nicht blofs einzelne Punkte, sondern ein zusammenhangendes Gebilde, eine Linie, gewonnen wird. Auch mufs auf diese Linie wieder die Teilung angewandt werden; man mufs also zeigen, dafs für diese Linien im wesentlichen dieselben Sätze gelten, wie

sie in den Grundsätzen 3—5, 7, 8 für die Gerade eingeführt sind. Auch die Art, wie die Lehre über den Schnitt einer Geraden mit einem Kegelschnitt und über die gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte gewöhnlich behandelt wird, läfst sich nicht ohne weiteres an die Entwicklungen des Herrn Pasch anschliefsen. Es bedarf daher noch einer eigenen Untersuchung, um darüber zu entscheiden, ob die angegebenen Grundsätze wirklich für den Aufbau der Geometrie genügen.

2. Euklid giebt für die Gerade und die Ebene folgende Definitionen, welche in den Vorbemerkungen zum ersten Buche die vierte und die siebente Stelle einnehmen:

»Die Gerade ist diejenige Linie, welche gegen die in ihr enthaltenen Punkte gleichförmig liegt.«

»Die Ebene ist diejenige Fläche, welche zwischen den in ihr enthaltenen Geraden gleichförmig liegt.«

Da in der letzten Definition die gleichförmige Lage zwischen den in einer Ebene enthaltenen Geraden gefordert wird, haben wir zunächst zu fragen, welche Geraden hierbei bereits vorausgesetzt werden. Der Wortlaut, sowie die Ähnlichkeit mit der Definition der geraden Linie, könnte uns veranlassen zu denken, dafs alle in der Ebene enthaltenen Geraden von vorn herein postuliert werden. Aber eine solche Auffassung dürfte nicht gestattet sein. Euklid will von vorn herein gewifs nur eine einfach unendliche Schar von Geraden betrachten und fügt die Forderung der gleichförmigen Lage hinzu, um die Ebene vor den übrigen Flächen auszuzeichnen, in denen unendlich viele gerade Linien enthalten sind. Wahrscheinlich vergleicht er die Ebene mit den verschiedenen Arten von Kegelflächen, indem er eine Schar von Geraden betrachtet, die durch einen festen Punkt gehen; dabei legt er ohne Zweifel zwei gerade Linien zu Grunde und bestimmt die übrigen Punkte (und Geraden) durch die Forderung der gleichförmigen Lage.

An zweiter Stelle müssen wir eine Erklärung des Ausdrucks »gleichförmige Lage« (*ἐξ ἴσου κεῖσθαι*) verlangen. Indessen suchen wir diese bei Euklid und überhaupt bei den Alten ganz vergebens. Proklus, der doch weitschweifig genug ist, geht auf diese Frage nicht ein; bei der Ebene begnügt er sich damit, die verschiedenen Arten der in sich verschiebbaren Flächen anzugeben;

betreffs der Geraden behauptet er, der Ausdruck solle heifsen, die gerade Strecke sei der kürzeste Weg zwischen je zwei ihrer Punkte, was ohne Zweifel Euklid ganz fern gelegen hat.

3. Augenblicklich scheinen folgende Definitionen sehr beliebt zu sein:

»Die Gerade ist diejenige Linie, welche durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist.«

»Die Ebene ist diejenige Fläche, welche durch eine Gerade und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt bestimmt ist.«

Manche ziehen für die Ebene die Form vor, sie sei durch drei Punkte bestimmt; hier mufs aber die Beschränkung beigefügt werden, dafs die drei Punkte nicht in einer geraden Linie liegen.

Man glaubt vielfach, hierdurch alles Axiomatische entfernt und diese Gebilde rein begrifflich eingeführt zu haben. Auch meint man jetzt folgern zu dürfen, dafs die Ebene jede zwischen zwei ihrer Punkte gezogene Gerade ganz enthält, und dafs zwei verschiedene Ebenen eine gerade Linie gemein haben.

Es will mir scheinen, als ob die Art, wie die Gerade und die Ebene in der projektiven Geometrie eingeführt worden, auf die Beliebtheit der angegebenen Definitionen von Einflufs gewesen sei. Indessen besteht zwischen der in der projektiven Geometrie geltenden Auffassung und derjenigen, welche sich in den aufgestellten Definitionen kundgiebt, ein wesentlicher Unterschied. Im letzteren Falle wird ein ganz bestimmtes System von Linien und Flächen verlangt; für die Projektivität kommt es nur darauf an, irgend ein System, welches den angegebenen Forderungen genügt, den weiteren Untersuchungen zu Grunde zu legen. Indem man sich aber, nachdem ein solches System einmal gewählt ist, ganz auf dasselbe beschränkt, dürfen wir jede einzelne Linie desselben durch zwei, jede seiner Flächen durch drei Punkte bestimmen (wo im letzten Falle die drei Punkte nicht derselben Linie des Systems angehören). Trotz der Ähnlichkeit in der äufsern Form besteht demnach in der Sache volle Verschiedenheit. Es geht also nicht an, die projektive Geometrie zur Rechtfertigung dieser Definitionen heranzuziehen.

Vielleicht hat auch ein anderer Umstand aut die Aufstellung der Definitionen eingewirkt. Nachdem für eine Kurve oder Fläche gewisse Eigenschaften festgelegt sind, besteht eine wichtige Aufgabe

in der Ermittlung der Zahl von Punkten, durch welche man Kurven oder Flächen von der verlangten Eigenschaft nur in einer endlichen Anzahl legen kann. So gehen durch vier Punkte der Ebene zwei Parabeln hindurch. Hervorragende Wichtigkeit bietet der Fall, dafs durch eine gewisse Zahl von Punkten jedesmal eine, und zwar eine einzige Kurve oder Fläche gelegt werden kann; alsdann sagt man, das Gebilde sei durch die Punkte bestimmt. In diesem Sinne ist ein Kreis durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt, welche so in einer Ebene liegen, dafs keine drei unter ihnen einer geraden Linie angehören. Nun hat man versucht, die Aufgabe umzukehren und die Eigenschaften eines Gebildes aus der Zahl der dasselbe bestimmenden Punkte herzuleiten. Aber was kann denn der Ausdruck: Eine Linie oder eine Fläche ist durch eine gewisse Zahl von Punkten bestimmt, für einen Inhalt haben, solange man die Eigenschaften der Linie oder der Fläche nicht als bekannt voraussetzt? Vergebens sieht man sich nach einer Erklärung dieses Ausdrucks um, die doch gegeben sein mufs, ehe man mit der aufgestellten Definition operieren darf.

Auch mufs es auffallen, dafs man diese Definition auf die Gerade und die Ebene beschränkt und bei den übrigen Gebilden von anderen Definitionen ausgeht. Der Grund liegt einfach darin, dafs man mit der Erklärung nichts anfangen kann. Selbst die Versuche, die einfachsten Eigenschaften der Gerade und Ebene aus ihr herzuleiten, können auf Strenge keinen Anspruch machen. Wollte man aber weitergehen, so würde die Leere des Begriffs noch deutlicher hervortreten. So versuche man nur, der Untersuchung des Kreises die Eigenschaft zu Grunde zu legen, dafs er durch drei Punkte bestimmt sei; man wird schwerlich zum Ziele gelangen.

Selbst in der Beschränkung auf die Gerade und die Ebene würde die Definition nur dann einen Schein von Berechtigung beanspruchen können, wenn es nur ein System von Linien und Flächen gäbe, welches durch die Forderung charakterisiert ist, dafs durch irgend zwei Punkte des Raumes eine einzige Linie des Systems und durch jede Linie des Systems und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt eine einzige Fläche des Systems hindurchgeht. Wie wir aber früher (VI § 1. S. 77, 78) erkannt

haben, giebt es ganz verschiedene Systeme, welche dieser Forderung genügen.

4. Wenn wir auch aus den angegebenen Gründen die aufgestellte Definition verwerfen müssen, so fragt es sich, ob in ihr nicht ein gesunder Kern enthalten sei. Nur wenn die Antwort bejahend ausfällt, ist die Beliebtheit dieser Definition zu begreifen. In der That glaube ich, dafs das folgende Postulat recht geeignet ist, die genannten Gebilde einzuführen:

»Es giebt ein System von Linien und Flächen, welches folgenden Forderungen genügt:

a) durch irgend zwei Punkte des Raumes geht eine und zwar eine einzige Linie des Systems;

b) durch eine Linie des Systems und einen nicht in ihr gelegenen Punkt geht jedesmal eine einzige Linie des Systems;

c) das System dieser Flächen und Linien bleibt bei allen Bewegungen ungeändert.«

Die dritte Forderung kann auch durch die folgende ersetzt werden: Jede Fläche des Systems bleibt bei einer Bewegung entweder in Deckung mit seiner Anfangslage oder geht in eine andere Fläche des Systems über.*)

Scheinbar hat die neue Definition denselben Inhalt wie die frühere; in Wirklichkeit besteht zwischen ihnen eine wesentliche Verschiedenheit, und die Ähnlichkeit beruht nur in der Form. Indem man die Gerade durch zwei Punkte bestimmt sein läfst, erweckt man den Anschein, als ob die Gerade rein begrifflich, ohne jedes Axiom eingeführt werden könne. Man operiert mit dem Ausdruck »bestimmt sein durch Punkte« wie mit einem Grundbegriff; man erklärt es für selbstverständlich, dafs durch einen einzigen Punkt eine Linie noch nicht bestimmt sein könne, dafs aber zwei Punkte hierfür genügen müfsten. Auf entsprechende Weise führt man die Ebene ein und wird sich nicht bewufst, neue Axiome eingeführt zu haben. Dagegen legt man bei der zuletzt gegebenen Definition ausdrücklich ein Axiom zu Grunde und nimmt dadurch einen principiell entgegengesetzten Standpunkt ein.

*) Ich brauche wohl nicht zu bemerken, dafs man sich auch bei der Aufstellung dieser Forderungen auf einen gewissen endlichen Bereich beschränken mufs.

5. Veronese giebt eine Definition der Geraden, welche äufserlich eine Vereinigung der Euklidischen Definition mit der an zweiter Stelle besprochenen darstellt, indem er sagt:

»Es giebt ein in der Position seiner Teile identisches Punktsystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist. Dies System heifst gerade Linie oder Gerade.«

Unter dem Ausdruck »in der Position seiner Teile identisch« soll hier aber nicht dasselbe verstanden werden, was Euklid mit den Worten „ἐξ ἴσου κεῖσθαι“ bezeichnet; denn bei Euklid ist dieser Ausdruck auf die Gerade und die Ebene beschränkt; bei Veronese dagegen sind auch die Kreis- und die Schraubenlinie in der Position ihrer Teile identische Systeme einer Dimension. Wenn er nicht die Bewegung aus der reinen Geometrie ganz ausschliefsen wollte, so würde er sagen, die Gerade solle in sich bewegt werden können.

Übrigens verlangt Veronese, der von vornherein den Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde legt, keineswegs, dafs eine Gerade durch je zwei ihrer Punkte bestimmt sei; vielmehr läfst er auch Punktepaare zu, durch welche die Gerade nicht bestimmt wird. Nur setzt er fest, dafs jeder Punkt, der einer geraden Linie nicht angehört, mit jedem ihrer Punkte eine neue Gerade bestimmt.

Auf die Art, wie Veronese die Ebene einführt, gehen wir erst an einer späteren Stelle (§ 6) ein, wenn wir sein System im Zusammenhang darlegen.

6. Mit dem Begriff der Geraden hängt der der Richtung eng zusammen. Viele möchten die letztere als Grundbegriff gelten lassen und definieren dann die Gerade als diejenige Linie, welche überall dieselbe Richtung hat. Nun hat aber die Gerade nicht eine, sondern zwei Richtungen, die einander entgegengesetzt sind; deshalb mufs an der Definition eine kleine Änderung angebracht werden. Andererseits geht aber hieraus auch hervor, dafs der Begriff der Richtung einfacher ist als der der geraden Linie; der einfachere Begriff mufs aber als der natürlichere angesehen werden. Hiernach dürfte es angebracht sein, den Begriff der Geraden auf den der Richtung zurückzuführen. Leider ermangeln aber alle bisher in diesem Sinne gemachten Versuche der Strenge; daher

ist es vorläufig notwendig, von der geraden Linie auszugehen und daraus den Begriff der Richtung herzuleiten.

7. Eine ganz merkwürdige Definition der Ebene stellt Schotten auf, indem er in dem oben angeführten Werke sagt: [16])

»Die Ebene ist diejenige Fläche, welche in ihrer Gesamtheit (in allen ihren Teilen) nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt ist (die überall nach denselben beiden Hauptrichtungen ausgedehnt ist).«

Wenn er glaubt, hiermit zuerst die wahre Erklärung der Ebene gefunden zu haben, so werden ihm gewifs nur wenige beistimmen. Ich möchte vor allem die Frage aufwerfen: Giebt es Flächen, die nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, oder solche, die in einzelnen Teilen nach zwei, in anderen nach drei Dimensionen ausgedehnt sind?

Wie unklar die Definition ist, scheint der Verfasser selbst gefühlt zu haben, da er sonst nicht versucht hätte, durch die beigefügten Klammern den Sinn zu erläutern. Ich glaube daher der weiteren Besprechung gerade die in Klammern eingeschlossenen Worte zu Grunde legen zu sollen. Hier geht der Verfasser von zwei Richtungen aus, die er als Hauptrichtungen bezeichnet (allerdings ohne im geringsten anzugeben, was er unter diesem Ausdruck versteht). Nun soll die Ebene überall nach denselben beiden Richtungen ausgedehnt sein. Dann mufs man wissen, wann zwei Richtungen identisch sind, die von ganz verschiedenen Punkten ausgehen. Ich fürchte, hier sei unbewufst der Begriff des rechten Winkels und die Parallelentheorie vorausgesetzt.

Endlich mufs ich noch auf folgenden Umstand hinweisen. Schotten spricht sich mit der gröfsten Entschiedenheit dafür aus, dafs man die Ebene vor der Geraden einführen müsse; indem er aber in der Definition der Ebene die »Hauptrichtungen« benutzt, geht er seiner Forderung entgegen von der geraden Linie aus.

8. Setzt man die Gerade als bekannt voraus, so lassen sich alle Eigenschaften der Ebene aus den beiden folgenden herleiten:

a) Eine gerade Linie, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, fällt ganz in sie hinein;

b) durch jede gerade Linie und einen beliebigen, ihr nicht angehörenden Punkt läfst sich eine Ebene legen.

Aus dem ersten Satze folgt, dafs zwei verschiedene Ebenen höchstens eine Gerade gemein haben, und dafs zwei verschiedene Ebenen sich jedesmal in einer geraden Linie schneiden, sobald sie einen Punkt gemeinschaftlich haben (V § 8, 2. S. 43). Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit der zweiten Voraussetzung, dafs durch eine Gerade und einen nicht in ihr liegenden Punkt (oder was dasselbe ist, durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen) eine einzige Ebene hindurchgeht.

Die beiden angegebenen Sätze kommen darauf hinaus, die Ebene als diejenige Fläche zu definieren, in welche eine gerade Linie jedesmal ganz hineinfällt, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemein hat, und damit das Postulat zu verbinden: Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte läfst sich eine Ebene legen.

Nun braucht man nur die Lage einer geraden Linie sich stetig ändern zu lassen, um eine Fläche zu erhalten, der eine einfach unendliche Schar von Geraden angehört. Auch können diese Flächen noch ganz verschieden sein je nach dem Gesetze, durch welches die Bewegung der Geraden geregelt wird. Aber es ist unmöglich, irgend ein Gesetz für die Veränderung einer Geraden anzugeben, welches gestattet, alle in der Ebene vorausgesetzten Geraden als einer einzigen Fläche angehörig unmittelbar in Evidenz treten zu lassen. Will man daher die Existenz der Ebene nicht einfach aus der Erfahrung herübernehmen, so mufs man eine Fläche durch eine einfach unendliche Schar von Geraden derartig bestimmen, dafs auch die Verbindungsgerade von irgend zwei der Fläche angehörenden Punkten ganz in sie hineinfällt.

9. Zu dem Zwecke hat man versucht, folgende Erzeugung zu Grunde zu legen: Man läfst die Gerade sich so um einen ihrer Punkte drehen, dafs sie stets eine den Punkt nicht enthaltende Gerade schneidet. Allerdings, wenn man die Existenz der Ebene voraussetzt, so bedarf es keines Nachweises, dafs diese Konstruktion eine Ebene liefert. Thut man das aber nicht, so mufs man dem festen Punkte und der festen Ebene ihre bevorzugte Stellung nehmen und nachweisen, dafs dieselbe Fläche erhalten wird, wenn der Punkt durch irgend einen andern Punkt der Fläche, die Gerade durch irgend eine ihrer Geraden ersetzt wird. Das ist allerdings von Crelle[16]) versucht worden; aber sein Nachweis kann nicht als streng angesehen werden.

10. Bedeutsamer ist ein Versuch, den Deahna[16]) zuerst gemacht hat. Auch er setzt die Existenz der Geraden voraus und fügt die der Kugel hinzu als einer Fläche, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte gleichen Abstand haben. Endlich nimmt er an, dafs die Kugel bei der Ruhe irgend eines Durchmessers noch bewegt werden kann und dafs dabei jeder Punkt eine geschlossene Linie beschreibt. Hierdurch erhält man auf der Kugel eine Schar von Kreisen, von denen jeder bei der Drehung desselben Durchmessers in sich verschoben wird. Unter diesen Kreisen giebt es einen, der die Kugelfläche in zwei kongruente Teile zerlegt. Die geraden Linien, welche vom Mittelpunkte der Kugel nach den Punkten dieses Kreises gezogen werden können, erzeugen eine Fläche, und zwar, wie nachzuweisen versucht wird, eine Ebene.

Im vorigen Paragraphen (S. 171) haben wir die Existenz des rechten Winkels nachgewiesen, ohne die Eigenschaften der Ebene vorauszusetzen. Demnach können wir an der Deahnaschen Herleitung eine kleine Änderung anbringen und einfach definieren:

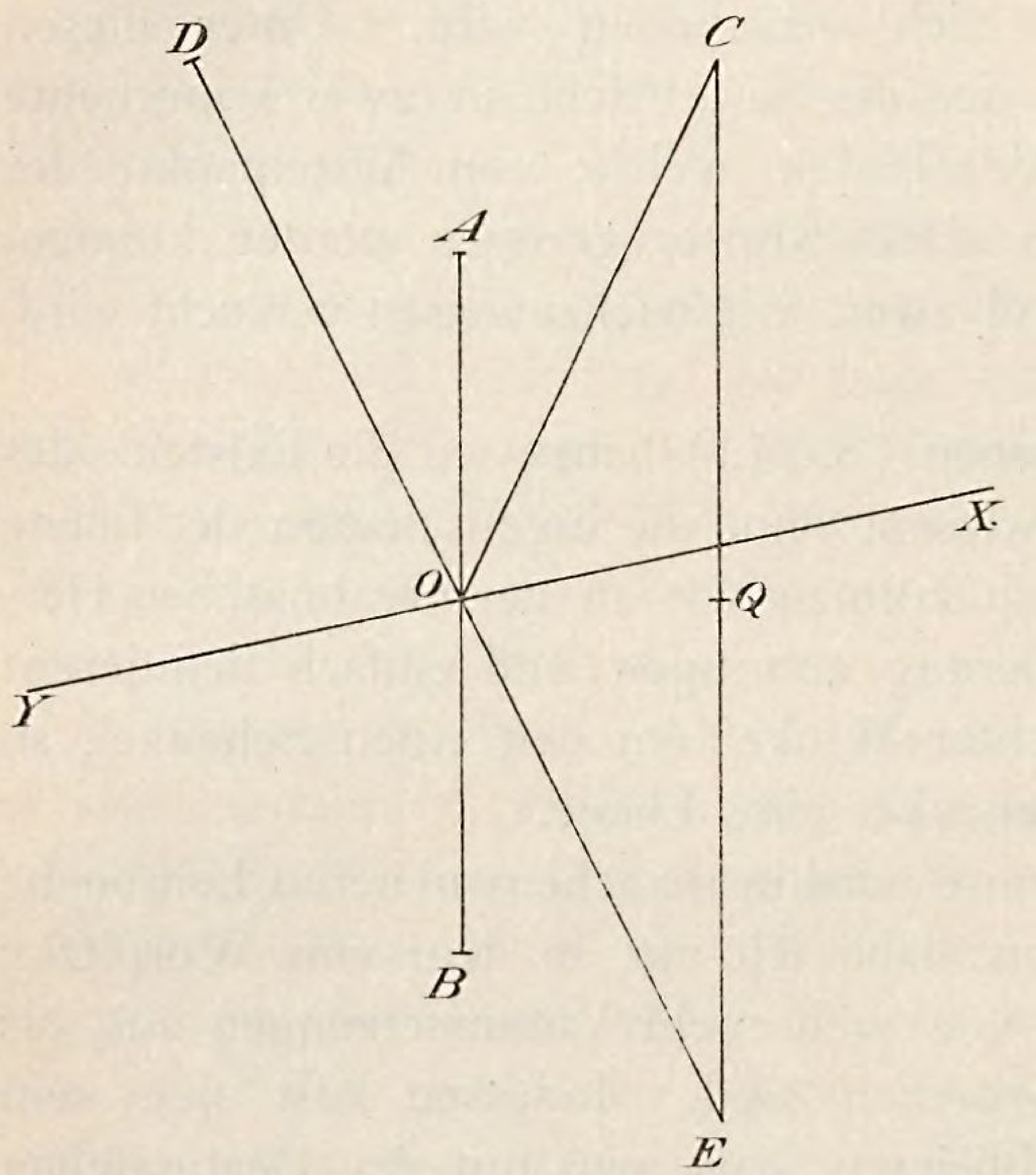
»Dreht sich ein rechter Winkel um den einen Schenkel, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene.«

Diese Entstehungsweise wird in manchem neueren Lehrbuche angegeben; einen Beweis habe ich nur in dem von Worpitzky gefunden. Nur geht er von weit mehr Voraussetzungen aus, als für die Herleitung erforderlich sind. Indessen läfst sich sein Beweisverfahren so modifizieren, dafs man mit den Deahnaschen Annahmen ausreicht; es sei gestattet, die Grundzüge des Beweises mitzuteilen.

Da der Punkt C, welcher der Geraden AB nicht angehören soll, bei der Drehung um AB eine geschlossene Linie beschreibt, so giebt es in dem Kreise, in dem sich C bei der Ruhe von AB bewegt, einen Punkt D von der Eigenschaft, dafs die Bogen CD und DC, in welche der Kreis durch diese beiden Punkte zerlegt wird, einander gleich sind, oder dafs, wie wir uns auch ausdrücken dürfen, während der Drehung einmal die Punkte C und D ihre Lage vertauschen. Demnach läfst sich jeder Winkel so bewegen, dafs die Schenkel ihre Lage vertauschen. Daraus geht hervor, dafs jeder Winkel seinem Scheitelwinkel gleich ist.

Jetzt lasse man den rechten Winkel AOX sich um den

Schenkel AO drehen. In der Verlängerung von AO wähle man den Punkt B so, dafs BO = OA ist. Ist C ein beliebiger Punkt des Raumes, der weder der Geraden AB noch der durch die Drehung von OX erzeugten Fläche angehört, so bestimme man denjenigen Punkt D, der bei der Drehung einmal seine Lage mit C vertauscht. Sobald C die Lage von D erhält, möge der Punkt X auf Y zu liegen kommen. Dann haben die Strecken OX und OY entgegengesetzte Richtung. Man ziehe noch die Strecken OC und OD und verlängere die letztere um OE = OD.



Offenbar ist

∢ COX = DOY,

und da der letztere als Scheitelwinkel gleich EOX ist, so ist auch COX = EOX und CX = EX. Läfst man jetzt die Schenkel des Winkels CXE ihre Lage vertauschen, so nimmt die Mitte Q der Strecke CE die Anfangslage wieder ein. Daraus folgt, dafs auch die beiden Nebenwinkel CQX und EQX einander gleich sind. Nun ist X ein beliebiger Punkt der erzeugten Fläche; dieselbe Fläche wird also auch erhalten, wenn man den rechten Winkel CQX um den Schenkel QC dreht. Der erzeugten Fläche gehört also eine gerade Linie ganz an, sobald sie mit ihr zwei Punkte gemein hat.

12. Da der angegebene Weg gestattet, die Existenz der Ebene aus der der Geraden in einer recht einfachen Weise herzuleiten, liegt es nahe, auch die Gerade selbst mit der Bewegung in Zusammenhang zu bringen. Man geht zu dem Ende von folgendem Axiom aus:

»Wird ein Punkt eines starren Körpers in Ruhe gehalten, so kann man jeden anderen Punkt des Körpers bewegen; sobald

aber zwei Punkte des Körpers in Ruhe gehalten werden, bleiben zugleich alle Punkte einer Linie in Ruhe. Diese Linie heifst eine Gerade. Bleibt aufser den beiden ersten Punkten noch ein Punkt in Ruhe, welcher nicht der durch die beiden ersten Punkte gehenden Geraden angehört, so verbleibt der Körper selbst in Ruhe.«

Dies Axiom hat den grofsen Vorzug, dafs man aus ihm alle Eigenschaften der geraden Linie ohne Schwierigkeit herleiten kann. Dem entgegen darf der kleine Mangel, dafs die Linie nicht unmittelbar als Grenze zweier Flächenteile auftritt, doch wohl nicht in Betracht kommen.

13. Es kann unsere Aufgabe nicht sein, jede Erklärung, welche über die Gerade und die Ebene gegeben ist, hier zu besprechen. Demnach gehen wir auch nicht auf die Erklärung der Ebene als einer in sich verschiebbaren und umkehrbaren Fläche ein. Dagegen müssen wir einige Worte sagen über die Versuche, welche gemacht sind, um die Theorie der Geraden und der Ebene aus der des Kreises und der Kugel herzuleiten. Vielfach werden folgende Definitionen aufgestellt:

»Eine Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei festen Punkten gleichen Abstand haben.«

»Konstruiert man um zwei feste Punkte als Mittelpunkte jedesmal gleiche Kugeln, so liegen ihre Schnittlinien auf einer Fläche, welche als Ebene bezeichnet wird.«

Um die gerade Linie zu erhalten, geht man wohl von drei Punkten aus, die gleichen Abstand von einander haben; man beschreibt um diese drei Punkte jedesmal gleiche Kugeln und bestimmt ihre Schnittpunkte; diese gehören sämtlich einer geraden Linie an.

Zur Geraden versucht man auch auf folgendem Wege zu gelangen. Man betrachtet eine Bewegung, bei der zwei Punkte in Ruhe gehalten werden; dann zeigt man, dafs hierbei auf jeder Kugel, die einen der beiden Punkte zum Mittelpunkt hat, zwei Punkte unbewegt bleiben und dafs alle diese Punkte eine Linie bilden. Sobald man auf diese Weise die Gerade eingeführt hat, kann man entweder vermittelst einer der zuletzt angegebenen Definitionen oder auf dem in 10. mitgeteilten Wege zur Ebene gelangen.

Meistens wird eine dieser Definitionen nur aufgestellt und daran die Bemerkung geknüpft, dafs sich alle Eigenschaften der Geraden und der Ebene daraus sehr leicht herleiten lassen. Nur in ganz seltenen Fällen wird der Beweis wirklich versucht; aber von allen diesen Versuchen, soweit sie mir bekannt geworden sind, kann keiner als befriedigend betrachtet werden.

Dennoch sind diese Versuche ohne Zweifel schon aus dem Grunde als dankenswert anzuerkennen, weil sie zeigen, in welch enger Beziehung der Kreis und die Kugel zur Geraden und Ebene stehen; auch spricht das Interesse, welches Gaufs ihnen zuwandte, für ihre hohe Bedeutung. Wir würden uns daher freuen, wenn die Theorie der Geraden und der Ebene aus der Kugel in voller Strenge und mit Beschränkung auf die unentbehrlichen Axiome durchgeführt würde. Dennoch möchten wir davor warnen, die Bedeutung einer solchen Herleitung zu hoch anzuschlagen. Gerade und Ebene stehen in besonders enger Beziehung zur Projektivität; ihre Existenz vermittelst metrischer Voraussetzungen herzuleiten kann also nicht als der natürlichste Weg bezeichnet werden.

§ 4.

Die Gerade als die kürzeste Linie.

1. Während Euklid aus den Sätzen über den Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln in demselben Dreieck den Satz herleitet, dafs die Summe zweier Seiten eines Dreiecks gröfser ist als die dritte Seite, stellt Archimedes in seinem Buche über Kugel und Cylinder neben vier anderen Postulaten das folgende auf: »Von allen Linien, welche in denselben Punkten begrenzt werden, ist die Gerade die kürzeste.« Man weifs aber nicht sicher, ob er in dem Satze ein wirkliches Axiom erblickt oder ihn nur deshalb an die Spitze stellt, weil er ihn bei seinen Untersuchungen fortwährend gebraucht. Proklus meint, Euklids Definition der Geraden als derjenigen Linie, welche gegen ihre Punkte gleichförmig liege, besage nichts weiter, als dafs sie die kürzeste Linie sei. Nachdem in neuerer Zeit Legendre die Gerade als die kürzeste Linie definiert hat, ist diese Definition in fehr viele neuere Lehrbücher übergegangen. Eine unbefangene Prüfung zeigt aber, dafs diese Definition unstatthaft ist, wofern man nicht eine Reihe neuer Axiome einführt, und zwar

a) weil von vornherein die Möglichkeit der Messung für alle Linien vorausgesetzt wird, was nicht angeht,

b) weil vor Ausführung der Messung ein Mafsstab vorhanden sein mufs, dieser aber erst durch die gerade Linie gegeben wird,

c) weil die Existenz eines Minimums nicht evident ist, vielmehr nur axiomatisch gefordert werden kann.

Diese drei Punkte sollen jetzt näher besprochen werden.

2. Es ist nicht gestattet, die Möglichkeit der Messung von Linien von vornherein zu postulieren. Zwar sagt man wohl, man könne einer Linie, ohne ihre Gröfse zu ändern, jede beliebige Gestalt geben. Dabei denkt man gewifs an einen unausdehnbaren, vollkommen biegsamen Faden. Aber so mannigfaltig auch die Gestalt sein mag, die man einem solchen Faden noch geben kann, es ist unrichtig, dafs er jede Gestalt erhalten könne. Das würde nur dann richtig sein, wenn man jede beliebige Linie messen könnte. Um die Länge einer Linie auf analytischem Wege zu finden, führt man im allgemeinen eine gewisse Integration aus. Das geht aber nur an, wenn die Kurve durch eine Funktion dargestellt wird, die eine Ableitung hat. In manchen Fällen haben die in die Kurve eingezeichneten gebrochenen Linien, die wir in V § 4 (S. 16) angegeben haben, einen endlichen Grenzwert, auch wenn die Kurve im allgemeinen keine Tangenten besitzt. Aber vielfach ist es geradezu unmöglich, von der Länge einer Linie zu sprechen. Um uns davon zu überzeugen, gehen wir etwa wieder von der Funktion aus, die wir bereits im ersten Bande (S. 172) erwähnt haben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

wo x eine reelle Variabele, b eine positive Konstante < 1 und a eine ungerade ganze Zahl ist, welche der Bedingung genügt: $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Jetzt betrachten wir x und y als die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten in einer Euklidischen Ebene. Für jeden Punkt (x, y) dieser Ebene ist $y \lesseqgtr f(x)$. Demnach bestimmt diese Funktion eine Teilung der Ebene in zwei Teile, indem man dem einen Teile diejenigen Punkte zuordnet, für welche $y > f(x)$ ist, und dem anderen Teile alle Punkte angehören läfst, für welche

$y < f(x)$ ist. Diese beiden Teile werden gegen einander abgegrenzt durch die Gesamtheit der Punkte, welche durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmt sind. Alle diese Punkte gehören demnach der Grenze zweier Flächenteile oder einer Linie an. Nun zeigen die bereits früher erwähnten Arbeiten, dafs man bei dieser Linie nicht von Länge sprechen kann. Derartige Beispiele lassen sich in grofser Zahl bilden. Es ist also nicht gestattet anzunehmen, dafs man jede Linie messen kann.

3. Ehe man eine Messung ausführen kann, mufs man einen Mafsstab haben. Als solcher dient für alle Linien die gerade Strecke. Will man also die Gerade als die kürzeste Linie definieren, so mufs man zunächst den Mafsstab angeben, durch den gemessen werden soll. Im andern Falle läuft man Gefahr, einen Zirkel zu machen, weil man die gerade Linie, die man definieren will, als Mafsstab bereits voraussetzt. Zur Beseitigung dieser Schwierigkeit ist noch nichts geschehen, obwohl sie auch im zweiten Bande von Lindemanns »Vorlesungen über Geometrie« hervorgehoben ist. Gelänge dies aber auch auf künstlichem Wege, so hätte man kaum etwas erreicht, da man im späteren Verlaufe wieder die gerade Strecke als Mafsstab benutzen mufs.

4. Wenn es aber auch möglich sein sollte, die angegebenen Schwierigkeiten zu beseitigen, so bedürfte man ein neues Axiom, um zur geraden Linie zu gelangen. Betrachtet man nämlich die Gesamtheit aller mefsbaren Linien, die zwischen zwei festen Punkten gezogen werden können, so lehrt die allgemeine Gröfsenlehre, dafs es für sie eine untere Grenze giebt; aber wir dürfen keineswegs schliefsen, dafs die untere Grenze auch wirklich erreicht wird, oder dafs, wie man sich ausdrückt, ein Minimum existiert; denn es ist auch möglich, dafs man der unteren Grenze wohl beliebig nahe kommen, aber sie nie erreichen kann.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Satz zu beweisen, wollen wir ihn an einfachen Beispielen erläutern:

Für die Gesamtheit der Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} \dots$, wo n eine ganze positive Zahl ist, bildet die Null die untere Grenze, aber diese wird von keiner der Menge angehörenden Gröfse erreicht.

In einer Euklidischen Ebene zeichne man den einen Zweig

einer Hyperbel und ziehe zu der einen Asymptote eine Parallele, welche den Zweig nicht schneidet. Die Abstände der Punkte des Zweiges von der Geraden haben eine untere Grenze, nämlich den Abstand der Geraden von der Asymptote, ohne dafs diese Grenze von einem Punkte der Hyperbel wirklich erreicht wird.

Um jetzt ein Beispiel zu liefern, welches mit der Gesamtheit der zwischen zwei Punkten verlaufenden Kurven im wesentlichen übereinstimmt, nehmen wir an, $\varphi(x)$ sei eine reelle, eindeutige und stetige Funktion von x im Intervalle $(-1 \ldots +1)$ von der Beschaffenheit, dafs ihre Ableitung zwischen denselben Grenzen stetig ist und dafs $\varphi(-1) = a$, $\varphi(+1) = b$ ist, wo $a \gtrless b$ sein soll. Wir betrachten die Gesamtheit aller Funktionen $\varphi(x)$, welche dieser Forderung für gegebene Werte von a und b genügen, und suchen die untere Grenze des Integrals

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(x \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx,$$

welches offenbar keinen negativen Wert annehmen kann.

Bezeichnen wir mit ε eine willkürlich anzunehmende positive Gröfse, so ist offenbar für

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} (x^2 + \varepsilon^2) \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

J_1 gröfser als J.

Ferner genügt die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \, \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

nebst der Ableitung

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \, \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

den aufgestellten Forderungen, sobald festgesetzt wird, dafs die Funktion arctgy für reelle Werte von y nur Werte zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ annehmen soll.

Für diese specielle Funktion wird aber

$$J_1 = \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\text{und } J < \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Für hinlänglich kleine Werte von ε kann man den Wert von $\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}$ beliebig nahe an $\frac{\pi}{2}$ bringen; somit wird sich auch der Wert von J der Null beliebig nähern. Aber es giebt keine Funktion, für welche das Integral diesen Wert wirklich erreicht. Denn alsdann müfste $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ im ganzen Intervall verschwinden oder es müfste $\varphi(x)$ eine Konstante sein. Das ist aber mit der Annahme unvereinbar, dafs die Werte a und b, welche die Funktion an der Grenze annimmt, von einander verschieden sind.

Ebenso wenig wie hier eine Funktion $\varphi(x)$ wirklich existiert, für welche das Integral seinen kleinsten Wert annimmt, darf man es als selbstverständlich voraussetzen, dafs unter allen Linien, welche zwischen zwei festen Punkten gezogen werden können, eine existiert, für welche die untere Grenze der überhaupt möglichen Längen wirklich erreicht wird.[17])

5. Die angegebenen Bedenken richten sich nur gegen den Versuch, rein begrifflich die gerade Strecke als kürzeste Linie einzuführen. Dagegen kann man die Gerade als kürzeste Linie einführen, wenn man geeignete Axiome aufstellt. Das hat Bettazzi[18]) in einer sorgfältig durchgeführten Arbeit gethan, und es wird nicht überflüssig sein, ihren Inhalt kurz anzugeben.

Den Ausgang der Untersuchung bildet als erstes Postulat die Definition der Kugel: Bewegt man den einen Punkt eines Punktepaares, während der andere fest ist, so kann der bewegte Punkt alle Lagen auf einer geschlossenen Fläche erhalten, in deren Innern der unbewegliche Punkt liegt. Auch wird vorausgesetzt, dafs die Punkte eines Paares mit einander vertauschbar sind.

Der Kürze wegen wollen wir jede in zwei Punkten begrenzte Linie eine Strecke (tratto) nennen. Die Kugel, welche der eine

Endpunkt einer Strecke bei der Ruhe des anderen beschreibt, soll die Öffnungskugel der Strecke heifsen. Wenn in einer Reihe von Strecken jede folgende mit der vorangehenden einen Endpunkt, aber keinen weitern Punkt gemein hat, so soll sie eine Gruppe von Strecken genannt werden. Aus jeder Strecke A_0B_0 kann in der mannigfaltigsten Weise eine Gruppe von Strecken gebildet werden, indem man sie 1. durch beliebige auf ihr gewählte Punkte A_1, A_2, A_3 . . . A_n, die nur in dieser Reihe auf einander folgen müssen, in die Teile A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ... $A_{n-1}A_n$, A_nB_0 zerlegt, und indem man 2. die einzelnen Teile beliebige Bewegungen ausführen läfst, die nur der Bedingung unterliegen, dafs die einzelnen Teile in Zusammenhang bleiben. Jede einzelne auf diese Weise erhaltene Gruppe von Linien nennt Bettazzi eine Brechungslinie (linea di spezzamento) der gegebenen Strecke.

Ebenso nennt Bettazzi eine Lineargruppe von Körpern eine Reihe von Körpern, von denen jeder mit dem vorangehenden und nachfolgenden einen Teil der Oberfläche gemein hat, während die Körper im übrigen ganz von einander getrennt sind.

Dieser Begriff wird benutzt, um aus einer gegebenen Strecke aufser den Brechungslinien noch weitere Linien herzuleiten. Zu dem Ende wird folgende Definition aufgestellt: Wenn eine Strecke l gegeben ist, so nennen wir eine andere Linie l' erzeugt von l, sobald für jeden willkürlich gewählten Körper S aus festen Körpern S_1, S_2 . . . S_n, die entweder S selbst oder Teilen von S gleich sind, sich eine Lineargruppe von Körpern konstruieren läfst, welche folgenden Bedingungen genügt: a) innerhalb des Körpers, der aus den Teilen S_1 . . . S_n besteht, ist die Strecke l' und eine passend gewählte Brechungslinie λ von l eingeschlossen; b) in jedem Körper S_α liegt nur eine einzige Strecke sowohl von l' wie von λ; c) die Öffnungen aller dieser Linien λ unterscheiden sich beliebig wenig von denen der Strecken l'. Die Brechungslinien und die erzeugten Linien sollen jetzt, wie das zweite Postulat verlangt, ein geschlossenes System bilden, in welchem jede Linie durch eine beliebige andere Linie des Systems ersetzt werden kann.

Alle Linien des so bestimmten Systems sollen den einen Endpunkt 0 gemeinschaftlich haben. Beschreibt man jetzt für alle die Öffnungskugeln, so sind zwei Fälle möglich: entweder bleiben

alle auf diese Weise erhaltenen Kugeln innerhalb einer um 0 beschriebenen Kugel, oder es giebt keine um 0 beschriebene Kugel, welche alle diese Kugeln umfafst; im ersten Falle wird das System endlich, im zweiten unendlich genannt. Für ein endliches System werden die vier Postulate aufgestellt, welche in der Arbeit die dritte bis sechste Stelle einnehmen:

III. Wenn die Strecke l_1 ein Teil der Strecke l ist, die zu einem endlichen System gehört, so ist jede Strecke des aus l_1 hergeleiteten Systems ein Teil einer aus l hergeleiteten Strecke.

IV. Wenn l_1 und l_2 Strecken aus endlichen Systemen sind, so ist auch das System endlich, welches die aus l_1 und l_2 gebildete Gruppe enthält.

V. Wenn zwei endliche Systeme nicht identisch sind, so giebt es in einem der beiden eine Strecke, die einen Teil einer dem andern System angehörenden Strecke bildet.

VI. Für jedes endliche System giebt es eine einzige Kugel, welche die obere Grenze für die sämtlichen Öffnungskugeln des Systems bildet.

Diese Postulate ermöglichen es, den Begriff der Länge in voller Strenge zu begründen. Um zur geraden Strecke zu gelangen, werden die weiteren Postulate hinzugenommen:

VII. Unter allen Strecken mit denselben Endpunkten giebt es ein einziges System, dessen Länge kleiner ist als die irgend einer anderen zwischen denselben Endpunkten möglichen Strecke; diese kleinste Strecke heifst die gerade Strecke.

VIII. Wenn zwei gleiche gerade Strecken einen Endpunkt und einen weitern Punkt gemein haben, so fallen sie ganz zusammen.

Um endlich die gerade Linie einzuführen, wird als neuntes Axiom der Satz beigefügt:

»Es giebt eine Linie, von der jedes Stück eine gerade Strecke ist.«

6. Der Raum gestattet uns nicht, die einzelnen Folgerungen, welche Bettazzi aus seinen Postulaten zieht und mit deren Hilfe er zunächst die Mefsbarkeit von Linien und dann die Eigenschaften der Geraden beweist, im einzelnen anzuführen. Indessen bieten diese Entwicklungen für uns geringeres Interesse. Dagegen müssen wir den Postulaten selbst einige Worte widmen.

Zunächst dürfen wir daran erinnern, dafs es immer mifslich ist, eine einzelne Frage, wie hier die nach der Mefsbarkeit von Linien und nach der Existenz der Geraden, abgesondert vom ganzen Lehrgebäude der Wissenschaft zu behandeln. Dadurch werden Mängel herbeigeführt, die sich bei einer andern Behandlungsweise leicht beseitigen lassen.

Was nun die Bettazzischen Postulate selbst betrifft, so können wir nicht billigen, dafs hier von vornherein der Raum als unendlich vorausgesetzt wird. Noch weniger gefällt es uns, dafs mit dem ganzen System der aus einer krummen Strecke erzeugten Strecken operiert wird. Auch läfst sich nicht übersehen, ob die aufgestellten Postulate von einander unabhängig sind.

Jedenfalls mufs die grofse Zahl von Postulaten einiges Erstaunen erregen. Dem Leser drängt sich unwillkürlich der Gedanke auf, es sei wahrscheinlich einfacher, über die Kugel einige Voraussetzungen zu machen, mit ihrer Hilfe auf dem Wege, der am Schlufs des vorigen Paragraphen angedeutet wurde, die Theorie der Geraden zu begründen und alsdann die Messung von beliebigen Linien in der Weise herzuleiten, welche in V § 4 (S. 16) entwickelt worden ist. Diesen Weg wird man um so lieber vorziehen, da auch Bettazzi unter seine Postulate zahlreiche Sätze über die Bewegung aufgenommen hat, während die Beliebtheit der Definition: »Die gerade Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten«, wohl hauptsächlich in der Unabhängigkeit von der Bewegung begründet ist.

§ 5.

Fläche, Linie und Punkt.

1. Auf die Frage, wie man am geeignetsten die Fläche, die Linie und den Punkt definiere, sind wir bereits früher (III § 3. B. 1. S. 172) eingegangen. Wir haben dort gesehen, dafs es nicht gestattet ist, vom Punkte auszugehen und die Linie durch Bewegung eines Punktes, die Fläche durch Bewegung einer Linie und den Raumteil durch Bewegung einer Fläche entstehen zu lassen. Denn erstens wird uns der Körper und der Raumteil durch die Natur gegeben, während der Punkt erst durch Abstraktion gewonnen werden kann. Zweitens ist es nicht richtig, dafs jede Linie durch Bewegung eines Punktes, jede Fläche durch

Bewegung einer Linie erhalten wird. Auch kann ein bewegter Punkt (B. 1. S. 170) eine Fläche oder einen Körper beschreiben. Demnach definieren wir die Fläche als die Grenze zweier Raumteile, die Linie als die Grenze zweier Flächenteile und den Punkt als die Grenze zweier Linienteile. Es wird nötig sein, auf diese Definition hier etwas näher einzugehen.

2. Ein Raum A sei in zwei Teile B und C zerlegt und ein Körper k, der ganz dem Raume A angehört, möge in gleichzeitiger teilweiser Deckung mit B und C sein; ein Teil von k möge also entweder den Raum B selbst oder einen Teil desselben decken, und ein anderer Teil von k möge im Raume C liegen. In diesem Falle sagen wir, der Körper k liege auf der Grenze der den Raum A bildenden Raumteile B und C.

Dieser Festsetzung entspricht es zu sagen, zwei Raumteile M und N hingen zusammen oder grenzten an einander, wenn es einen Raumteil P giebt, der in die beiden Teile M und N zerlegt werden kann; dementsprechend dürfen M und N einerseits keinen Teil gemeinschaftlich haben, andererseits müssen sie einen einzigen Raumteil bilden.

Von B trennen wir Teile ab, die nicht mit C zusammenhangen; so sei B in die beiden Teile B′ und B″ zerlegt, von denen der letztere nicht an C grenzen möge. Dann gehört der Körper k, der auf der Grenze von B und C liegt, auch der Grenze von B′ und C an. Ebenso dürfen wir von C einen Teil C″ abtrennen, der nicht mit B zusammenhängt, ohne die gegenseitige Grenze zu verändern. Auch ist es gestattet, diese Operation unbeschränkt fortzusetzen. Hierbei sind zwei Fälle möglich: entweder bilden die übrigbleibenden Teile B′ und C′, die mit einander in Verbindung stehen, bei jeder Abtrennung von Teilen, die nicht an den andern Raumteil grenzen, stets einen einzigen Raum; oder, wenn man von den beiden Teilen B und C solche Teile abtrennt, welche jedesmal mit dem andern Teile keinen Zusammenhang haben, so bestimmen die übrig bleibenden Teile mehrere Körper. Im zweiten Falle kann man vom Raume A mehrere Räume A_1, A_2 . . . abgetrennt denken, die unter einander nicht in Zusammenhang stehen, von denen aber jeder durch die vorhin ausgeführte Teilung in zwei Teile zerfällt, etwa A_1 in B_1 und C_1, A_2 in B_2 und C_2 u. s. w. Diesen Teilen soll die

weitere Eigenschaft zukommen, dafs jeder Körper, der auf der Grenze von B und C liegt, in gleichzeitiger teilweiser Deckung mit zwei Teilen ist, in die einer der Räume A_1, A_2 . . . zerfällt. Im ersten Falle sagen wir, die Grenze der Raumteile B und C bestehe aus einer einzigen Fläche, im zweiten lassen wir die Grenze in mehrere Flächen zerfallen. Die Teilung des Raumes A in die beiden Teile B und C liefert daher eine einzige Fläche (B, C), wenn man in ganz beliebiger Weise von jedem der beiden Teile solche Gebiete abtrennen kann, die nicht an den anderen Teil grenzen, ohne dafs der übrigbleibende Teil in mehrere Räume zerfällt. Besteht die Grenze aus mehreren Flächen, so kann man jede für sich untersuchen.

3. Ein Raumteil A führe durch seine Zerlegung in die Teile B und C auf die Fläche (B, C); ebenso sei ein Raumteil L in die beiden Teile M und N zerlegt, die in einer einzigen Fläche (M, N) an einander grenzen. Die Fläche (B, C) ist identisch mit der Fläche (M, N), wenn jeder Körper, der ganz im Raume A liegt und mit den beiden Räumen B und C in gleichzeitiger teilweiser Deckung ist, auch die beiden Raumteile M und N teilweise deckt. Wir können in diesem Falle auch sagen: Indem wir von B Teile abtrennen, die nicht mit C zusammenhangen, und von C Teile entfernen, die nicht an B grenzen, und in entsprechender Weise mit den beiden Raumteilen M und N verfahren, läfst sich, wofern die Flächen zusammenfallen, durch die angegebene Operation erreichen, dafs der übrigbleibende Teil von B mit dem übrigbleibenden Teile von M (bezw. N) und der übrigbleibende Teil von C mit dem von N (bezw. M) identisch wird.

In ähnlicher Weise sagen wir, die Fläche (M, N) bilde einen Teil der Fläche (B, C), wenn jeder Körper, der auf der Grenze von M und N liegt, auch mit den Raumteilen B und C in gleichzeitiger teilweiser Deckung ist, während ein Körper auf der Grenze von B und C liegen kann, ohne der Grenze von M und N anzugehören.

Eine Fläche (B, C) ist in die beiden Flächen (M, N) und (P, Q) zerlegt, wenn jeder Körper, welcher auf der Grenze von B und C liegt, entweder der Grenze von M und N oder der Grenze von P und Q oder beiden Grenzen angehört. Wir dürfen demnach sagen, die Fläche (B, C) bestehe aus den Flächen (M, N)

und (P, Q), wenn a) jeder Körper, der mit M und N in teilweiser Deckung ist, auch auf der Grenze von B und C liegt, b) jeder Körper, der auf der Grenze von P und Q liegt, auch für B und C dieselbe Eigenschaft hat, und c) jeder Körper, der mit B und C in teilweiser Deckung ist, teilweise entweder den vier Räumen M, N, P, Q oder den beiden Räumen M und N oder den beiden Räumen P und Q angehört.

In derselben Weise, wie wir hier den Raumteil A in die beiden Teile B und C zerlegt haben und dadurch zu der Fläche (B, C) gelangt sind, können wir auch einen Körper a in zwei Teile teilen und dementsprechend eine Fläche als Grenze zweier Teile eines Körpers erhalten. Eine Fläche (b, c), die auf dem letzteren Wege gewonnen wird, deckt eine durch zwei Raumteile erhaltene Fläche (B, C), wenn jeder Raumteil, mit dem die Körper b und c in gleichzeitiger teilweiser Deckung sind, sowohl mit B wie mit C einen Teil gemeinschaftlich hat. Hiernach braucht man nicht zu definieren, was es heifse, eine Fläche decke einen Teil einer andern u. dgl.

4. Der weiteren Untersuchung legen wir wieder die Annahme zu Grunde, dafs durch die Zerlegung von A in die Teile B und C eine einzige Fläche (B, C) gewonnen wird. Dann können wir B in zwei Teile D und E zerlegen, die beide mit C zusammenhangen. Da die Raumteile C und D einen einzigen Raum bilden, so bestimmen sie eine Fläche (C, D); ebenso führen die an einander grenzenden Raumteile C und E auf eine Fläche (C, E). Nun überzeugen wir uns sehr leicht, dafs die Fläche (B, C) in die beiden Teile (C, D) und (C, E) zerfällt. Dieselbe Operation, welche wir vorhin mit den Raumteilen B und C vorgenommen haben, können wir jetzt auf die Flächen (C, D) und (C, E) übertragen: wir können von der Fläche (C, D) einen Teil abtrennen, der nicht mit (C, E) zusammenhängt, und ebenso von (C, E) beliebige Flächenteile entfernen, die nicht mit der Fläche (C, D) in Verbindung stehen. Durch diese Überlegung werden wir auf die Grenze zweier Flächenteile geführt, die entweder aus einer einzigen Linie besteht oder sich in mehrere Linien zerlegt.

5. Es wird gut sein, diesen Gedanken durchzuführen, ohne den Begriff der Fläche zu benutzen. Der Raumteil A sei in drei

Teile C, D, E derartig zerlegt, dafs jeder Teil an die beiden anderen grenzt. Zugleich soll aber, indem wir etwa von C beliebige Teile abtrennen, die weder mit D noch mit E in Zusammenhang stehen, mindestens ein Teil übrig bleiben, der sowohl mit D wie mit E zusammenhängt. Wofern diese Bedingungen erfüllt sind, sagen wir, jeder der drei Teile läge auf der gemeinschaftlichen Grenze gegen die beiden anderen.

Jetzt teilen wir C in zwei Teile C′ und C″, von denen der zweite höchstens mit einem der Teile D und E in Zusammenhang steht. Ebenso trennen wir von D einen Teil D″ ab, der entweder an keinen der Teile C und E oder nur an einen von ihnen grenzt, und nennen den übrigen Teil D′. In entsprechender Weise sei E in die beiden Teile E′ und E″ zerlegt. Die drei auf diese Weise erhaltenen Raumteile C′, D′, E′ bilden entweder einen einzigen Raumteil A′, oder man gelangt zu getrennten Räumen, von denen jeder sowohl einen Teil von C′ als auch von D′ und von E′ enthält. Es genügt offenbar, den ersten Fall allein zu betrachten und anzunehmen, dafs, wie man auch immer von den drei Raumteilen C, D, E Gebiete abtrennt, welche nicht der gemeinschaftlichen Grenze gegen die beiden anderen angehört, der übrigbleibende Teil jedesmal einen einzigen Raum bildet. In diesem Falle sagen wir, die gemeinschaftliche Grenze der drei Raumteile sei eine Linie. Wir können jetzt genau in derselben Weise, die wir für die Flächen dargelegt haben, definieren, was es heifse, zwei Linien seien identisch, eine Linie sei ein Teil einer anderen, eine Linie sei in zwei Teile zerlegt u. dgl. Auch können wir wieder eine Linie durch Teilung eines Körpers entstehen lassen und die weiteren Untersuchungen, die wir oben für die Fläche angestellt haben, mit Leichtigkeit auf die Linie übertragen.

Hierbei müssen wir noch auf folgenden Umstand hinweisen. Wenn die Teilung des Raumes A in die drei Teile C, D, E eine einzige Linie bestimmt, so sind für die Teilung des Raumes C in zwei Teile C′ und C″ drei Fälle möglich: entweder grenzt einer der beiden Teile an D und E oder beide Teile grenzen an D und E oder einer der beiden Teile grenzt nur an D und der andere an E. Im dritten Falle möge C′ mit D, C″ mit E zusammenhangen. Denken wir jetzt die Teile C″ und E zu einem

neuen Raume E_1 vereinigt, so bestimmt die Teilung (C', D, E_1) dieselbe Linie, wie die Teilung (C, D, E).

6. Durch die vorangehenden Entwicklungen sind alle Momente gegeben, welche bei der Definition des Punktes in Betracht kommen. Wir können von einer Linie ausgehen und sie in zwei Teile zerlegen; von jedem Teile trennen wir Stücke ab, welche nicht an den anderen Teil grenzen; dadurch werden wir auf die Grenze zweier Linienteile geführt, welche in einem Punkte besteht oder in mehrere Punkte zerfällt. Auch können wir unmittelbar von einem Raumteil A ausgehen und ihn so in vier Teile zerlegen, dafs jeder Teil mit den drei anderen in Zusammenhang steht und dieser Zusammenhang bestehen bleibt, wie auch von jedem der Teile Gebiete abgetrennt werden, welche nicht an die anderen Teile grenzen. Die Durchführung dieser Gedanken ist so leicht, dafs wir nicht näher darauf einzugehen brauchen.

§ 6.

Wundts Definition des Raumes.

Wenn wir auch die Behandlung aller philosophischen Fragen von unserem Werke ausschliefsen, so müssen wir doch auf Wundts Raumtheorie[19]) etwas näher eingehen, da dieser Philosoph, wie überhaupt auf die übrigen Wissenschaften, so auch auf die Ergebnisse der mathematischen Forschung sorgfältig Rücksicht nimmt. Indessen müssen wir uns Beschränkung auferlegen, indem wir die Raumtheorie rein für sich und auch so nur nach ihrer mathematischen Seite betrachten. Somit wollen wir unser Hauptaugenmerk auf seine Definition des Raumes und die ihr entsprechenden Axiome der Geometrie richten und alles andere nur soweit berücksichtigen, als es für die Beurteilung der Raumtheorie nicht entbehrt werden kann.

Bei der Definition, welche Wundt vom Raume giebt, verlangt er mit vollem Rechte, dafs darin keine Begriffe vorkommen, die bereits in irgend einer Weise den Raum voraussetzen. Demnach geht er von den fünf Begriffen aus: 1. Gröfse, 2. Richtung, 3. Stetigkeit, 4. Veränderung, 5. Zahl, und zwar in einem Sinne, der nichts specifisch Räumliches einschliefst. Darauf gründet er folgende Definition:

»1. Der Raum ist eine stetige und unbegrenzte Gröfse, in welcher das Einzelne, welches nicht in weitere Bestandteile zerlegt werden kann, durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt wird. Das unzerlegbar Einzelne im Raume heifst Punkt. Die Bestimmung irgend eines Einzelnen im Raume durch die drei unabhängigen Richtungen heifst Lage. 2. Jeder beliebige Teil des Raumes kann vom übrigen Raum abgesondert gedacht werden. Ein solcher abgetrennter Teil des Raumes (ein zusammengesetztes Einzelnes) heifst ein Raumgebilde. 3. Jedes Raumgebilde kann in veränderter Lage gedacht werden, ohne dafs dadurch das wechselseitige Lagenverhältnis beliebig in ihm angenommener Punkte verändert wird. Diese Eigenschaft des Raumes heifst Kongruenz. 4. Zu jeder Richtung im Raume existiert eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage, und die Lage zweier zusammengehöriger entgegengesetzter Richtungen heifst eine Gerade.«

Den wesentlichen Inhalt dieser Begriffsbestimmungen glaubt er in folgender Weise zusammenfassen zu können: »Der Raum ist eine stetige, in sich kongruente unendliche Gröfse, in welcher das unzerlegbare Einzelne durch drei Richtungen bestimmt wird.«

Diese Definition wird an einer späteren Stelle durch die folgenden vier Axiome ersetzt: »1. Die Lage eines jeden Punktes ist durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt. 2. Die Lage jedes beliebigen ausgedehnten Raumgebildes wird durch die Lage dreier willkürlich in ihm angenommener Punkte bestimmt. 3. Jedes Raumgebilde bleibt mit sich kongruent, wenn es beliebig in veränderter Lage gedacht wird. Zwei Raumgebilde sind daher kongruent, wenn das eine aus einer blofsen Lageänderung des andern entstehen kann. 4. Jede beliebige Richtung im Raume kann als eine ins Unendliche zunehmende Gröfse gedacht werden.«

Wir glauben unser Interesse hauptsächlich der ausführlichen Definition zuwenden zu sollen. Ehe wir aber zur Besprechung des ersten Satzes derselben übergehen, müssen wir eine Bemerkung vorausschicken. Man hat es vielfach als einen Mangel der analytischen Geometrie bezeichnet, dafs durch die Einführung der Koordinaten etwas Fremdes in die Wissenschaft hineingebracht werde, dafs die ganze Untersuchung gleichsam einen Umweg

mache, indem man dasjenige Gebilde, dessen Eigenschaften ermittelt werden sollen, nicht für sich, sondern in seiner Lage gegen ein anderes, davon durchaus unabhängiges Gebilde, das Koordinatensystem, untersucht. Wenn man auf diesen Vorwurf auch erwidern kann, dafs man die Lage eines Gebildes überhaupt erst dann bestimmen kann, wenn man die Lage eines anderen als gegeben betrachtet, so behält er doch immer seine Berechtigung. Mag der Vorteil, den die Anwendung der Analysis für die Geometrie bietet, noch so grofs sein, mag es vielfach gelingen, das Koordinatensystem in organischen Zusammenhang mit dem zu untersuchenden Gebilde zu bringen, oder mag man sich von dem gewählten System unabhängig machen können: an sich ist die Koordinatenbestimmung dem Raume fremd. Eine Definition des Raumes, bei der diese Bestimmung zur eigentlichen Grundlage gemacht wird, kann demnach nicht als natürlich angesehen werden.

Für die Fassung des ersten Satzes der Definition ist ohne Zweifel das Cartesisehe Koordinatensystem bestimmend gewesen. Dabei legt man bekanntlich drei Richtungen zu Grunde, die von einem Punkte ausgehen, ohne einer Ebene anzugehören; durch je zwei der angenommenen Achsen legt man eine Ebene, zieht von dem zu bestimmenden Punkte aus die Parallele zu jeder der drei Achsen bis zum Schnittpunkt mit der durch die beiden anderen Achsen gelegten Ebene und mifst die drei auf diese Weise erhaltenen Strecken durch dasselbe Mafs. Offenbar kann aber diese Konstruktion in ihrer Ausführlichkeit hier nicht gemeint sein, da sonst schon der Raum und seine Eigenschaften vorausgesetzt würden, während der Begriff der Richtung nur in einem Sinne postuliert wird, der auf Raum, Zeit, Zahl, Empfindungsintensität in gleicher Weise anwendbar ist. Demnach kann der angegebene Satz nur den Sinn haben, dafs man überhaupt von drei Richtungen ausgehend jedem Punkte drei Zahlen zuordnen könne, ohne dafs der Weg, auf dem dies möglich sein soll, wirklich angegeben wird. Das ist aber höchst mifslich; denn entweder wird der Leser unwillkürlich die Cartesischen Koordinaten heranziehen und dadurch den angewandten Begriffen räumliche Eigenschaften beilegen, oder er wird von der Definition nicht befriedigt sein, da ihm die Möglichkeit der Messung nicht

einleuchtet. Zu wenig in die Definition hineinzulegen, dürfte auch nicht angehen; so können wir kaum glauben, der Raum solle hier, um einen treffenden Ausdruck Lies zu gebrauchen, nur als eine dreifach ausgedehnte Zahlenmannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Überhaupt ist der Verfasser im Irrtum über die Bedeutung der Zahl der Dimensionen, wenn er darin nur die Zahl der Elemente erblickt, welche zur Bestimmung der Lage eines Punktes notwendig sind, wenn er sie also, wie er einmal ausdrücklich sagt, für Hilfsgröfsen der geometrischen Forschung hält. Dem gegenüber müssen wir beachten, dafs diese Zahl von der höchsten realen Bedeutung ist, indem der Ausdruck, der Raum hat drei Dimensionen, besagt, dafs eine dreimal wiederholte Teilung in der früher angegebenen Weise (S. 198) auf das unteilbare Gebilde, den Punkt, führt. Im dritten Abschnitt (B. 1. S. 168—172) haben wir zudem erkannt, dafs wir die Punkte des Raumes durch jede beliebige Zahl von Gröfsen bestimmen können, dafs z. B. für diesen Zweck die Zahlen einer einzigen Reihe ausreichen. Auch in anderer Hinsicht leiden die Angaben Wundts über die mehrdimensionale Geometrie an so vielen Ungenauigkeiten, dafs es unmöglich ist, sie einzeln zu besprechen.

Soviel glauben wir aber hier bewiesen zu haben, dafs wir unmöglich den ersten Satz als eine geeignete Grundlage für die Definition des Raumes anerkennen können. Vielleicht bietet aber der dritte Satz der Definition noch gröfsere Schwierigkeiten. Wie wir sehen, will der Verfasser zur Erklärung der Kongruenz den festen Körper nicht heranziehen. Er erklärt in den vorangehenden Erläuterungen ausdrücklich, die Geometrie als die abstrakte Wissenschaft der Raumelemente habe von denjenigen Erscheinungen abzusehen, welche aus der physikalischen Konstitution der Körper hervorgehen; auch könne der Satz, dafs es absolut feste Körper giebt, um deswillen eine physikalische Vorstellung nicht sein, weil er physikalisch unrichtig sei. Über diesen Punkt glauben wir uns im fünften Abschnitt ausführlich genug ausgesprochen zu haben; wir wiederholen hier nur: Der Geometrie kommt es einzig und allein auf die Vergleichung der Raumteile an; ob man dazu einen festen Körper benutzen oder sie in anderer Weise vermittelt denken will, ist an sich gleichgültig; nur mufs die Vergleichung, von der

die Geometrie ausgeht, denselben Gesetzen folgen wie die Bewegung fester Körper. Demnach haben wir zu untersuchen, ob es Wundt gelungen sei, ohne Benutzung der festen Körper eine genügende Grundlage der Kongruenz zu schaffen.

Um diese Frage zu beantworten, beachten wir zuerst die Erläuterungen, welche der Verfasser auf den der Definition vorangehenden Seiten seines Werkes giebt. Hier operiert er fortwährend mit der »Translocierung von Raumteilen«; er denkt geradezu einem abgegrenzten Teile des Raumes eine andere Lage gegeben und setzt voraus, dafs derselbe infolge dieses Lagenwechsels seine räumlichen Eigenschaften nicht verändert. Das ist aber höchst bedenklich; denn erstens ist der Raum und mit ihm jeder seiner Teile durchaus unbeweglich; zweitens gehört doch die Lage im Raume zu den räumlichen Eigenschaften (so ist die Lage, durch die sich zwei kongruente Würfel unterscheiden, doch wohl eine räumliche Eigenschaft); es ist also unstatthaft zu sagen, ein Raumgebilde verändere durch Lagenänderung seine räumlichen Eigenschaften nicht.

Indessen wäre es unrecht, an solche der Erklärung gewidmete Partieen den Mafsstab der äufsersten Strenge zu legen. Wundt betrachtet an den erwähnten Stellen ohne Zweifel zwei Raumgebilde von verschiedener Lage, die in allen übrigen räumlichen Eigenschaften übereinstimmen. Was das zu bedeuten habe, soll dann durch den dritten Satz seiner Definition erklärt werden. Zwar deuten die ersten Worte: »Jeder Raumteil kann in veränderter Lage gedacht werden«, wieder auf eine Dislocierung hin. Wenn aber ein Raumgebilde seine Lage nicht ändern kann, so darf es auch nicht in geänderter Lage gedacht werden. Somit müssen wir das Hauptgewicht auf die Worte legen, das wechselseitige Lagenverhältnis beliebig in einem Raumgebilde angenommener Punkte werde nicht verändert. Wir fragen uns daher: Wann gilt das wechselseitige Lagenverhältnis in verschiedenen Raumgebilden als gleich? Nach dem ersten Satze der Definition, der das Wort Lage erklären will, müssen wir beidemal drei Richtungen zu Grunde legen und mit ihrer Hilfe den einzelnen Punkten Koordinatenwerte zuordnen. Gewifs ist diese Erklärung ausreichend, wenn wir beidemal ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde legen und beidemal dieselbe Längeneinheit

gebrauchen. Das dürfen wir hier aber nicht voraussetzen; denn alsdann hätten wir den Begriff der Kongruenz vorweggenommen, der doch hier erst erklärt werden soll. Der erste Satz der Definition sagt nichts vom Winkel der Koordinatenachsen und von der Längeneinheit. Wir haben somit kein Mittel, die beiden Koordinatensysteme mit einander zu vergleichen. Hiernach bleibt die Möglichkeit, dafs das eine Raumgebilde durch ein rechtwinkliges, das andere durch ein schiefwinkliges Koordinatensystem bestimmt sei; auch braucht nicht beidemal dieselbe Längeneinheit benutzt zu werden. Mit Hilfe solcher Systeme seien den einzelnen Punkten des ersten Gebildes die Wertsysteme (x_1, x_2, x_3) und den Punkten des zweiten Gebildes die Wertsysteme (y_1, y_2, y_3) zugeordnet. Läfst man jetzt dem Punkte (x_1, x_2, x_3) denjenigen Punkt (y_1, y_2, y_3) entsprechen, für den $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ ist, so müssen nach der Definition die Raumgebilde als kongruent angesehen werden, während sie es in Wirklichkeit nicht sind.

Der vierte Satz definiert die Gerade durch zwei einander entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage. Hier hat das Wort »Lage« doch offenbar eine ganz andere Bedeutung als im ersten Satze der Definition; es fehlt jede Andeutung, wie dies Wort denn überhaupt verstanden werden soll. Danach sucht man auch in der beigefügten Fufsnote vergebens; im Gegenteil giebt diese zu weiteren Bedenken Veranlassung.

Über die Axiome möchten wir zunächst bemerken, dafs die Übereinstimmung zwischen ihnen und den beiden Definitionen doch weit geringer ist, als Wundt annimmt: nur würde es zu weit führen, dies hier zu beweisen. Dagegen glaube ich die Aufmerksamkeit des Lesers auf das zweite Axiom hinlenken zu sollen. In der aufgestellten Form halte ich dasselbe geradezu für unrichtig, da jedes Raumgebilde an sich eine feste Lage hat, diese also nicht erst durch Punkte bestimmt werden kann. Das Axiom mufs demnach zum mindesten an die dritte Stelle gesetzt werden, indem man ihm die Bedeutung beilegt, dafs ein Gebilde, welches einem gegebenen kongruent sein soll, vollständig bestimmt ist, sobald man die Lage von drei Punkten kennt. Aber selbst in dieser Form ist es nicht geeignet, die scharfen Forderungen Helmholtz' zu ersetzen; denn mit der Wundtschen Form wäre es u. a. vereinbar, dafs die Lage des dritten Punktes noch ganz

willkürlich ist, nachdem man die der beiden ersten beliebig gewählt hat.

Man mufs es bedauern, dafs Wundt nicht die Folgerungen aus seiner Definition so weit gezogen hat, bis er wenigstens die Existenz der Ebene und die Parallelentheorie begründet hätte. Dann würde er wohl genötigt gewesen sein, auf die wirkliche Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie einzugehen. Was er jetzt darüber sagt, trifft nicht ihre Theorie selbst, sondern richtet sich gegen unrichtige Ansichten, die er sich darüber gebildet hat. So glaubt er, man stelle sich vor, die Gerade sei ein Bestandteil des objektiven Raumes, der darum, weil er unabhängig von uns existiere, auch gelegentlich seine Eigenschaften verändern könne. Eine Andeutung Riemanns in seiner Habilitations-Vorlesung versteht er dahin, als halte es dieser Mathematiker für möglich, dafs durch ein Zurückgehen auf das unmefsbar Kleine eine der wesentlichen Eigenschaften des Raumes sich verändern könne. Dem entgegen darf ich daran erinnern, dafs auch für den Mathematiker die Gleichförmigkeit des Raumes oberstes Princip ist.

Überhaupt bleiben alle Eigenschaften des Raumes, die Wundt für wesentlich hält, in den nicht-euklidischen Raumformen ungeändert; nur verlangt er in der kürzeren Definition und im vierten Axiom, dafs der Raum unendlich sein solle. Dadurch werden allerdings manche Raumformen ausgeschlossen; aber Wundt selbst kann diese Eigenschaft nicht für wesentlich ansehen, da er in der ausführlichen Definition nur verlangt, dafs der Raum unbegrenzt sein soll; die letztere Eigenschaft kommt aber allen Raumformen gleichmäfsig zu.

§ 7.

Eine Arbeit Überwegs.

Wir müssen hier auf eine Abhandlung Überwegs [20]) über die Grundlagen der Geometrie eingehen, die allerdings auf die weiteren Entwicklungen dieser Theorie keinen bemerkbaren Einflufs ausgeübt hat, die aber als Vorläuferin der bekannten Helmholtzschen Arbeiten Beachtung verdient, da sie siebzehn Jahre früher erschienen ist und im Grundgedanken eine merkwürdige Übereinstimmung zeigt.

Schon die Stellung und Rechtfertigung der Aufgabe bietet Interesse. Überweg vermifst in den Principien der Mathematik wissenschaftliche Strenge, da sich darin Begriffe ohne Definitionen, Sätze ohne Beweise (Axiome), Forderung der Lösung von Aufgaben ohne Nachweis der Mittel (Postulate) finden. Nun glaubt er, die Arithmetik bedürfe keiner Axiome, wofern nur die genügenden Definitionen vorausgeschickt würden. Aber aus den Principien der Geometrie könne nicht alles Unbewiesene eliminiert werden. Dementsprechend machen sich seiner Ansicht nach zwei Forderungen geltend, die eine: zwischen den mannigfaltigen gangbaren Grundbegriffen, Axiomen, Postulaten durch eine wissenschaftliche Ableitung einen Zusammenhang nachzuweisen; die andere: den Grund der Gewifsheit des mathematisch Unbeweisbaren darzuthun. Dem zweiten Problem werden nur wenige Seiten gewidmet; Überweg will eingehend nur die erste Aufgabe behandeln. Dabei bieten sich zwei Wege dar, von denen der eine von der philosophischen Bestimmung des Raumes, der zweite von einer bestimmten empirischen Anschauung ausgeht. Da der erste erst eingeschlagen werden kann, nachdem mehrere philosophische Fragen endgültig gelöst sind, will der Verfasser den zweiten verfolgen; er will mit anderen Worten von einem Experimente ausgehen. Nun erfolgt die Sonderung des Raumes aus der sinnlichen Totalanschauung nur durch Wahrnehmung von Bewegungen. Demnach erachtet er die Bewegung als ein wesentliches Element seines Experimentes und glaubt speciell das nachstehende seiner Einfachheit wegen empfehlen zu sollen:

Ein materieller fester Körper kann nach dem Zeugnis der Sinne, I. wenn er unbefestigt ist, überallhin gelangen, wo sich nicht etwa schon ein anderer fester Körper befindet; II. derselbe, an einer einzelnen Stelle festgehalten, kann sich nicht mehr unbeschränkt überallhin bewegen, ist aber doch nicht aller Bewegung beraubt; III. aufserdem noch an einer zweiten Stelle festgehalten, kann derselbe an keiner Stelle mehr alle bei (II) möglichen Bewegungen machen, aber doch immer noch bewegt werden; IV. wird aber eine dritte Stelle des Körpers befestigt, die bei (III) noch bewegt werden konnte, so wird alle Bewegung desselben überhaupt unmöglich.

Mit diesem Experimente verbindet er, indem das Zeugnis der

Sinne idealisiert wird, das Axiom oder die Hypothese, dafs die vorstehenden Bestimmungen mit absoluter Genauigkeit gelten. Dann sucht er daraus mit mathematischer Strenge analytisch zurückzuschliefsen auf die Grundbestimmungen des Raumes. Sind diese gefunden, so tritt endlich von ihnen aus das synthetische Verfahren ein, welches den ganzen Reichtum der Geometrie erzeugt. Streng auszuschliefsen ist hierbei jede Anschauung, jedes Axiom, jedes Postulat, überhaupt jede Bestimmung, die nicht in dem Obigen liegt.

Aus dem ersten Teile des Experimentes werden die Definitionen des Ortes, der unendlich kleinen Gröfse, der Stetigkeit hergeleitet und die Gleichartigkeit, Kontinuität und Unendlichkeit des Raumes erschlossen. Der zweite Teil führt auf den Punkt, den Weg eines Punktes, auf den kugeligen Ort (die Kugelfläche), auf den allgemeinen Begriff der Fläche und liefert zahlreiche Sätze über diese Gebilde.

Uns interessiert besonders eine Stelle, worin der Verfasser zeigt, dafs er mit vollem Bewufstsein mehr aus der Erfahrung erschliefsen will, als er in der obigen Skizzierung seines Experimentes ausdrücklich angegeben hat. Er will alle Bewegungen untersuchen, die noch möglich sind, wenn e i n e Stelle eines festen Körpers festgehalten wird. Zu dem Zwecke geht er ausdrücklich wieder auf die Erfahrung zurück und erklärt: »Die Erfahrung zeigt uns, dafs, wenn mehrere Orte befestigt sind, andere Erscheinungen als die angeführten, nämlich die beiden folgenden Teile unseres Experimentes eintreten. . . . Die bleibende Stelle kann also kein endlicher Teil des Raumes sein; sie kann selbst keine zweite gleichartige Stelle in sich unterscheiden lassen und ist daher das absolut einfache Raumelement.« Auch die Annahme, dafs mit der Ruhe eines Punktes ein durch denselben hindurchgehendes Gebilde regelmäfsig in sich verbleibt, wird an einer spätern Stelle ausgeschlossen, indem hervorgehoben wird, die Kugel mit dem Mittelpunkte α könne ins Unendliche abnehmen, indem ihr Grenzwert der Punkt α sei, »dessen Gröfse $= 0$ vorgestellt wird«.

Auf die Folgerungen, welche Überweg aus dem dritten und vierten Teile seines Experimentes zieht, wollen wir nicht eingehen. Wir bemerken nur, dafs er zum Schlufs seiner analytischen

Untersuchung auf die gerade Linie geführt wird, indem er den Lehrsatz zu beweisen sucht: »Bei jeder Drehung eines Körpers um zwei feste Punkte giebt es eine, aber auch nur eine Linie, die unbewegt bleibt; die beiden festen Punkte fallen in sie hinein.« Demnach definiert er die Gerade als diejenige Linie, welche bei der Drehung um zwei ihrer Punkte in sich verbleibt, und giebt dann dem vorstehenden Satze die Form: »Zwischen je zwei Punkten giebt es eine, aber auch nur eine gerade Linie, die über beide hinaus ins Unendliche verlängert werden kann.«

Die synthetische Untersuchung, welche sich jetzt anschliefst, will zunächst zeigen, dafs der Raum drei Dimensionen hat, sucht dann den Begriff der Richtung zu begründen, definiert die Ebene als den Ort der gleichen Abstände von zwei Punkten und glaubt daraus die Fundamentaleigenschaft der Ebene herleiten zu können. Der Begriff der Richtung führt auf den Winkel und liefert, wie Überweg meint, eine weitere Grundlage für die Parallelentheorie.

Wie wir sehen, hat die Arbeit zahlreiche Mängel; das Experiment, aus dem alle Eigenschaften des Raumes hergeleitet werden sollen, genügt keineswegs; noch weniger können die Beweise als befriedigend anerkannt werden. Immerhin bleibt dieser Versuch, der noch älter ist als Riemanns bekannte Vorlesung, von hohem Interesse, um so mehr, da sich der Verfasser, wie er sagt, nur in einzelnen Partieen an eine Schrift von Erb anschliefsen konnte, im Plane des Ganzen aber ohne Vorgänger war. Zudem zeigt Überwegs »Experiment« grofse Ähnlichkeit mit den »Thatsachen«, von denen Helmholtz viele Jahre später ausging. Ob der letztere die vorliegende Arbeit gekannt hat, wird sich wohl nicht ermitteln lassen; nur ist es auffallend, dafs Helmholtz häufig den Ausdruck »kugelige Flächen« gebraucht, wie Überweg von »kugeligen Orten« spricht; jedenfalls müssen wir wohl beachten, dafs die Voraussetzungen, von denen Helmholtz ausgeht, weit schärfer und umfassender, und dafs seine Beweise von ganz anderer Natur sind.

Zum Schlufs dieses kurzen Überblicks müssen wir unserm Bedauern Ausdruck geben, dafs Überweg durch seinen frühen Tod verhindert wurde, diese Abhandlung (und einige weitere) in neuer Bearbeitung herauszugeben, was er nach einer Mitteilung von Theodor Toeche in seinen letzten Lebensjahren beabsichtigt hat.

§ 8.

Tillys Grundlagen der Geometrie.

Wir wenden uns jetzt zu einer Arbeit von de Tilly,[21]) die ohne Zweifel durch Helmholtz' Untersuchungen beeinflufst ist, deren Ziel aber darauf hinauskommt, die von Helmholtz gemachten Voraussetzungen zu vereinfachen und die rechnende Beweismethode des letzteren durch eine geometrische zu ersetzen.

1. Tilly glaubt nach Begründung der Begriffe von Fläche, Linie und Punkt die ganze Geometrie auf dem Begriffe der Entfernung aufbauen zu können. Wie er sagt, ist jedesmal mit irgend zwei Punkten A und B des Raumes eine gewisse Gröfse, die Entfernung AB, derartig verbunden, dafs

a) alle Entfernungen gleichartige Gröfsen sind, die verschiedenen Entfernungen also der Gesamtheit der positiven Zahlen zugeordnet werden können, und dafs

b) die Entfernung AB nur null wird, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Es möge hier bemerkt werden, dafs Tilly im Grunde genommen nicht die Entfernung r selbst seiner Untersuchung zu Grunde legt, sondern eine beliebige Funktion f (r), welche für alle positiven Werte von r eindeutig und stetig ist, für $r = 0$ verschwindet und mit wachsendem Argument selbst wächst; derartige Funktionen können aber in der mannigfaltigsten Weise gebildet werden.

Mit der Entfernung werden diejenigen Bewegungen in Zusammenhang gebracht, bei denen jedes System von Punkten in sich unverändert bleibt. Demnach stellt Tilly folgendes Axiom auf:

»Die Entfernung ändert sich im Raume auf stetige Weise, d. h. wenn man eine beliebige von zwei Punkten A und B begrenzte Linie betrachtet, so verändert sich die Entfernung der Punkte dieser Linie vom Endpunkte B auf eine stetige Weise von AB bis null.«

»Ist im Raume eine beliebige Figur gegeben, welche die Punkte A und B enthält, hat ferner der Punkt B' von A dieselbe Entfernung wie der Punkt B, so kann man die Figur bei der Ruhe des Punktes A so bewegen, dafs das System unverändert bleibt und dafs der Punkt B die Lage des Punktes B' erhält.«

Diese Voraussetzungen faſst Tilly als erstes oder Haupt-Axiom zusammen; daran schlieſst er das zweite Axiom, nach welchem die Entfernung zweier Punkte unbegrenzt wächst.

Aus diesen beiden Axiomen glaubt er die Geometrie einwurfsfrei herleiten zu können.

2. An erster Stelle beweist er den Satz, daſs, wenn in einer Figur die Punkte A und B, und in einer zweiten Figur die Punkte A′ und B′ derartig gewählt sind, daſs die Entfernungen AB und A′B′ einander gleich sind, man jedesmal der zweiten eine neue Lage geben kann, in welcher der Punkt A′ auf A, B′ auf B fällt. Zu dem Ende verbindet er die Punkte A und A′ durch eine beliebige Linie; hierin muſs ein Punkt O liegen, für den OA = OA′ ist. Nun genügt eine zweimalige Anwendung des Hauptaxioms, die Richtigkeit des Satzes zu erkennen.

3. Hieran schlieſst sich eine Untersuchung, die für das Werk eine fundamentale Bedeutung hat. Wenn der Punkt X eine beliebige Linie (AB) beschreibt, sich etwa vom Punkte B zum Punkte A hinbewegt, so ändert sich die Entfernung XB des Punktes X von B stetig; sie braucht nicht fortwährend zu wachsen, kann vielmehr Maxima und Minima haben; da aber die Entfernung gleich null wird, wenn man den Punkt X mit B zusammenfallen läſst, so muſs es in der Nachbarschaft des Punktes B einen Bereich BB′ geben, auf dem die Entfernung stets zunimmt, wofern der Punkt X auf ihr von B weggeht. Diesen Bereich nennt Tilly die région de croissance continue.

Aus dieser Behauptung schlieſst er, daſs es zwischen zwei Punkten A und B mindestens eine Linie giebt, auf der die Entfernung vom Endpunkte A fortwährend wächst. Erstreckt sich nämlich auf einer beliebigen zwischen A und B gezogenen Linie (AB) der Bereich fortwährenden Wachstums vom Punkte A bis zu einem Punkte M, so ist die Entfernung AM entweder gleich der Entfernung AB oder gröſser oder kleiner als dieselbe. Ist AM = AB, so kann man die Figur so um A drehen, daſs M auf B fällt; dann hat die neue Linie die vorgeschriebene Eigenschaft. Wenn aber AM > AB ist, so giebt es in AM einen Punkt B′, für den AB′ = AB ist; jetzt kann man die Linie (AB′) so bewegen, daſs B′ auf B fällt; der Satz ist also ebenfalls bewiesen. Wofern aber endlich AM < AB ist, muſs es, weil für

den Punkt M die Entfernung aufhört zu wachsen, einen Punkt M' in der Linie zwischen M und B geben, für den AM' = AM ist und von dem aus die Entfernung XA zunächst wächst, wenn sich X von M' aus auf dem Zweige (M'B) bewegt. Nun dreht man die Linie (AM), bis M auf M' fällt, und betrachtet statt der Linie (AB) diejenige Linie, welche aus der mit (AM) kongruenten Linie (AM') und dem ursprünglichen Zweige (M'B) besteht. Dadurch ist der Bereich fortwährenden Wachstums gröfser geworden. Wiederholt man also die angegebene Operation, so mufs man schliefslich eine Linie (AB) erhalten, welche die geforderte Eigenschaft besitzt.

4. Aber nicht blofs auf jeder Linie, sondern auch auf jeder Fläche giebt es nach Tilly um jeden Punkt A herum einen Bereich fortwährenden Wachstums der Entfernung. Um das zu beweisen, zieht er auf der Fläche von dem Punkte aus unendlich viele, einander unendlich nahe Linien. Auf jeder Linie giebt es einen endlichen Bereich fortwährenden Wachstums; die Entfernungen der einzelnen Endpunkte von A bestimmen eine Mannigfaltigkeit von Gröfsen, unter denen es ein von null verschiedenes Minimum giebt; betrachtet man auf jeder Linie nur den Punkt, dem diese kleinste Entfernung zukommt, so begrenzt die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Punkte einen Bereich von der verlangten Eigenschaft.

5. Nachdem die Kugel in bekannter Weise definiert ist, werden folgende Sätze bewiesen:

»Wird der Mittelpunkt der Kugel festgehalten und bleibt ein Teil der Oberfläche unbewegt, so kann überhaupt kein Teil der Kugel bewegt werden.«

»Wenn bei der Ruhe des Mittelpunktes eine auf der Kugelfläche gezogene Linie in Ruhe bleibt, so mufs auch die Kugel als Ganzes unbewegt bleiben.«

»In einem bewegten System bleibt kein Raumteil und keine Oberfläche in Ruhe.«

»Zwei verschiedene Kugelflächen können keinen Teil ihrer Oberflächen gemeinschaftlich haben.«

Was den Beweis dieser Sätze betrifft, so bemerken wir nur, dafs Tilly regelmäfsig von den Bereichen fortwährenden Wachstums auf einer Linie und auf einer Fläche Gebrauch macht.

6. Durch eine unendlich kleine Drehung eines unveränderlichen Systems um einen festen Punkt O gelangt ein Punkt A auf einen Punkt B, zugleich aber der Punkt B auf C, C auf D u. s. w. Alle diese Punkte A, B, C, D . . . liegen nicht nur auf derselben Kugel, sondern gehören auch sämtlich einer Linie an, welche bei der Bewegung in sich verschoben wird. Diese Linie mufs entweder unendlich oder geschlossen sein. Der erste Fall kann nicht eintreten, da die Linie einerseits einem endlichen Raumteile angehört, andererseits sich keinem Punkte unbegrenzt nähern kann, ohne ihn zu erreichen. Demnach bedeckt sich jede Kugel, die O zum Mittelpunkt hat, bei der angegebenen Bewegung mit geschlossenen in sich verschiebbaren Linien. Die Grenze dieser Linien ist, wie weiter gezeigt wird, ein Punkt, der bei der Bewegung in Ruhe verbleibt.

7. Nun führt Tilly auf der Kugel um jeden Punkt A herum neben dem Bereiche fortwährenden Wachstums noch einen weiteren Bereich ein, der die Eigenschaft hat, dafs alle Punkte, welche ihm nicht angehören, von A weiter entfernt sind als die Punkte des Bereiches. Mit Hilfe dieses neuen Begriffes zeigt sich, dafs auf jeder Kugel noch ein zweiter Punkt liegt, der bei der angegebenen Bewegung in Ruhe bleibt. Daraus folgt weiter der Satz:

»Bei der Ruhe zweier Punkte ist noch Bewegung möglich; dann beschreibt jeder Punkt auf einer Kugel, die einen der ruhenden Punkte zum Mittelpunkt hat, eine geschlossene Linie. Alle Punkte vollenden ihren Umlauf gleichzeitig, und alle Punkte einer gewissen Linie, der Geraden, bleiben bei der Bewegung in Ruhe.«

Nachdem dann noch gezeigt ist, dafs es zwischen zwei Punkten eine einzige gerade Linie giebt, und dafs die Entfernung AB gleich der Entfernung BA ist, bietet der weitere Ausbau der Geometrie keine Schwierigkeit mehr.

8. Das hierdurch skizzierte System Tillys kann als Versuch, für den es sich durch den Titel ausgiebt, lebhaftes Interesse beanspruchen; auch enthält es ohne Zweifel manche Keime, welche bei weiterer Entwicklung sich für die Grundlagen der Geometrie als nützlich erweisen können. Aber die übertriebenen Lobsprüche, mit denen die Arbeit von ihrem Erscheinen an bis in die jüngste Zeit überschüttet worden ist, zwingen uns, eine sachliche Prüfung

eintreten zu lassen und wenigstens einigen Bedenken, die wir gegen die Arbeit hegen, offenen Ausspruch zu geben.

9. Tilly will eine rein geometrische Methode anwenden; er ordnet nicht, wie Helmholtz, den einzelnen Punkten Wertsysteme zu, um dann auf rechnerischem Wege geometrische Sätze zu erhalten, sondern er will auch in seinen Beweisen ganz auf dem Boden der Geometrie verbleiben. Während Helmholtz eine gröſsere Anzahl von Axiomen voraussetzt, glaubt Tilly im wesentlichen nur ein einziges zu bedürfen. Aber während Helmholtz' Voraussetzungen einen geometrischen, oder wenn man lieber will, einen mechanischen Charakter an sich tragen, stellt Tillys Axiom eine Mischung von Algebra und Geometrie dar, die unmöglich natürlich sein kann. Nachdem ein Punkt O gegeben ist, wird jedem Punkte A eine gewisse Zahl zugeordnet; diese Zahl bleibt für die Punkte einer gewissen Fläche ungeändert; sie ändert sich stetig, wenn der Punkt A irgend eine Bewegung ausführt. Eine solche Festsetzung trägt vollständig den Stempel der Willkür an sich. Noch weniger erhält man eine Antwort auf die Frage, wie sich denn die Entfernung bestimmen lasse. Auch sind die Beweise keineswegs geometrisch, sondern, wie Veronese treffend hervorhebt, rein analytischer Natur.

10. Nun könnte man denken, die Entfernung als Zahlgröſse könne durch gewisse geometrische Annahmen ersetzt werden; die Benutzung des Abstandes sei demnach nur ein überflüssiges Beiwerk, welches leicht entfernt werden könne. In der That, sobald man die Annahme macht, daſs die Kugel eine geschlossene Fläche ist, in deren Innerem der Mittelpunkt liegt, kann man jeder beliebigen Reihe von Punkten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_\lambda \ldots A_\mu \ldots$ eine Reihe von Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_\lambda \ldots a_\mu \ldots$ zuordnen, welche allen Anforderungen Tillys genügt. Man braucht ja zu dem Ende nur die Forderung zu stellen, daſs, wofern A_μ auſserhalb der durch A_λ, aber innerhalb der durch A_ν gelegten Kugel liegt, die Zahl $a_\mu > a_\lambda$, aber $a_\mu < a_\nu$ sein soll. Hiernach sollte man denken, die Möglichkeit, jedem Punkte des Raumes in der von Tilly geforderten Weise eine Zahl zuzuordnen, sei eine bloſse Folgerung aus dem hier gemachten rein geometrischen Axiom. Indessen würde man sich vergeblich bemühen, wenn man aus dem neuen Axiom die Folgerungen ziehen wollte, die Tilly aus

dem seinigen herleitet. Das legt den Gedanken nahe, dafs Tillys System sich nicht auf die angegebene Grundlage stützt, sondern fremde Voraussetzungen hinzunimmt.

11. In der That gründet sich sein Beweisverfahren darauf, dafs es auf jeder Linie und jeder Fläche um einen beliebigen Punkt herum einen Bereich fortwährenden Wachstums giebt. Dieser Satz gilt aber keineswegs für jede Linie, da er sich auf die Annahme stützt, dafs, wofern die Entfernung der einzelnen Punkte einer Linie von dem einen Endpunkte Maxima und Minima besitzt, die Zahl derselben stets endlich ist. Dafs diese Annahme nicht gemacht werden darf, ergiebt sich aus Sätzen, welche in neuerer Zeit nach Weierstrafs' Vorgange für die reellen stetigen eindeutigen Funktionen einer reellen Variabeln aufgefunden und welche durch Dinis Lehrbuch der Funktionentheorie für jeden leicht zugänglich gemacht sind. Ich erinnere nur an die ebene Linie, welche in Cartesischen rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung:

$$y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} b^{\varkappa} \cos (a^{\varkappa} x \pi)$$

unter den früher angegebenen Bedingungen (S. 187) dargestellt wird. Solche Linien müssen bei dem Verfahren Tillys von vornherein ausgeschlossen werden, was kaum angeht.

12. Noch weit bedenklicher ist der entsprechende Satz für Flächen. Tilly zieht auf der Fläche durch den angenommenen Punkt eine Reihe von Linien, sucht auf jeder den Bereich fortwährenden Wachstums und bestimmt die untere Grenze der einzelnen Bereiche. Durch diese Erwägung erhält er einen gewissen Teil der Fläche und nimmt an, dafs derselbe in einer festen Beziehung zu der Fläche steht, während man diesem Gebiete der Fläche nur dann eine von der Auswahl der Linien unabhängige Eigenschaft beilegen darf, wenn alle von dem Punkte ausgehenden Linien in Betracht gezogen werden. Aber selbst für eine einzige Schar von Linien fehlt der Nachweis, dafs die untere Grenze der Entfernungen von null verschieden ist, und ein solcher Nachweis läfst sich gar nicht führen. Um das zu erkennen, nehmen wir die einfachste Fläche, die Euklidische Ebene, wählen in ihr einen Punkt A, legen durch A eine Gerade und ziehen alle Kreise,

welche diese Gerade in A berühren. Auf beiden Seiten werden die Radien der Kreise und damit die Bereiche fortwährenden Wachstums immer kleiner; es existiert also keine von null verschiedene untere Grenze. Nun beruhen die weiteren Beweise darauf, dafs für jede Fläche der Bereich fortwährenden Wachstums von null verschieden ist, stützen sich also auf einen Satz, der unmöglich richtig sein kann.

13. Die Annahme, dafs es in jeder Fläche um einen beliebigen Punkt einen Bereich fortwährenden Wachstums giebt, darf hiernach wohl als der fundamentale Fehler in Tillys System bezeichnet werden. Wenn im Vergleich hiermit die übrigen Mängel des Werkes auch weniger in Betracht kommen, so möchten wir doch die Art und Weise noch erwähnen, wie diejenige Drehung um einen Punkt eingeführt wird, bei der jeder Punkt eine in sich verschiebbare Linie beschreibt. Bei einer solchen Bewegung soll die Veränderung betrachtet werden, die in einem Augenblick vor sich geht; da, heifst es, werde der Punkt A durch einen Punkt B ersetzt, B durch C u. s. w. Eine solche Darstellung wäre nur gestattet, wenn auf jeden Augenblick ein anderer unmittelbar folgte, und wenn es in einer Linie zu jedem Punkte einen bestimmten unmittelbar vorangehenden und einen unmittelbar folgenden gäbe. Da beides nicht der Fall ist, kann man den Beweis nicht für genügend erachten.

§ 9.

Veroneses Aufbau der Geometrie.

Das grofse Werk Veroneses »Fondamenti della Geometria«, welches vor kurzem auch in einer deutschen Ausgabe erschienen ist,[22]) zerfällt nach einer Einleitung in zwei Teile, von denen der erste »die Gerade, die Ebene und den Raum von drei Dimensionen im allgemeinen Raum« behandelt, während der zweite Teil dem »Raum von vier und n Dimensionen im allgemeinen Raume« gewidmet ist. Ein Anhang befafst sich mit historisch-kritischen Untersuchungen über die Principien der Geometrie. So wichtig die Einleitung, in der die »Fundamentalsätze über die abstrakten mathematischen Formen« entwickelt werden, auch für das ganze System sind, müssen wir uns doch versagen, darauf hier einzugehen. Zwei besonders wichtige Kapitel sind im fünften

Abschnitt besprochen; in gleicher Weise den Inhalt der übrigen Kapitel mitzuteilen, würde zu weit führen. Noch weniger dürfen wir uns mit dem Anhang beschäftigen; dagegen müssen wir dem Leser einen Einblick zu vermitteln suchen in die interessante und originelle Art und Weise, in der die Geometrie von Veronese aufgebaut wird. Zu dem Zwecke will ich die ersten Definitionen, Axiome und Sätze wesentlich in der vom Verfasser eingehaltenen Reihenfolge geben; natürlich mufs ich darauf verzichten, die Erläuterungen und Beweise ebenfalls mitzuteilen. Für den späteren Inhalt des Werkes begnüge ich mich mit einem zusammenfassenden Überblick. Selbstverständlich behalte ich die Nomenklatur des Verfassers auch da bei, wo sie von der meinigen durchaus abweicht.

1. Den Anfang bilden folgende Definitionen und Axiome:

Def. Das Grundelement, aus welchem sich die Formen zusammensetzen, heifst Punkt.

Ax. I. Es giebt verschiedene Punkte. Alle Punkte sind identisch.

Def. Jede Form, deren Grundelement der Punkt ist, nennen wir Figur oder geometrisches Ding oder Gebilde.

Def. Der allgemeine Raum ist durch ein System von Punkten gegeben, derart, dafs, wenn eine beliebige seiner Figuren von n Dimensionen in ihm gegeben ist, es wenigstens einen Punkt aufserhalb dieser Figur giebt. Die Wissenschaft, die sich mit den Figuren (und daher mit dem allgemeinen Raum) beschäftigt, heifst Geometrie.

Ax. II. Es giebt ein in der Position seiner Teile identisches Punktsystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist. Das System heifst gerade Linie oder Gerade. Es giebt Punkte aufserhalb der Geraden. Jeder Punkt, welcher nicht der Geraden angehört, bestimmt mit jedem Punkte derselben eine andere Gerade.

Ax. III. Wenn zwei beliebige Gerade einen Punkt A gemeinschaftlich haben, so ist mit einem beliebigen Segment (AB) der ersten ein Segment (AB′) der zweiten, und den Vielfachen von (AB) die Vielfachen von (AB′) identisch.

Daraus werden u. a. folgende Sätze hergeleitet:

»Die Gerade ist einfach geschlossen oder einfach offen.«

»Wählt man einen Punkt X der Geraden, so giebt es nur zwei einem beliebigen anderen Segment gleiche Segmente, welche das Element X zum gemeinschaftlichen Ende haben und gleich gerichtet sind.«

»Wenn zwei Punkte die Gerade nicht bestimmen, so enthält jede Gerade, die den einen Punkt enthält, auch den anderen. Jedes geradlinige Segment ist ein Teil einer einzigen Geraden. Alle durch einen Punkt gehenden Geraden bestimmen den allgemeinen Raum. Zwei beliebige Gerade sind identisch.«

Die weitere Entwicklung geht nach der Definition des Dreiecks von folgenden Definitionen aus:

»Unter der Umgebung eines gegebenen Punktes A verstehen wir das Gebiet, welches durch alle von A ausgehenden Segmente, die einem beliebigen noch so kleinen Segment ε gleich sind, bestimmt wird. Der Abstand 2ε heifst die Ausdehnung der Umgebung von A.«

»Ein Punkt L heifst Grenzpunkt einer Punktgruppe (X) oder einer Reihe von Punkten (X_n), wenn in jeder beliebigen Umgebung von L in beliebig kleiner Ausdehnung ein Punkt der Gruppe oder der Reihe liegt, falls n so grofs genommen wird, dafs jeder Punkt X_{n+r} in die genannte Umgebung fällt.«

Der Ausdruck »ein veränderliches Dreieck« soll soviel bedeuten als eine Reihe von Dreiecken.

Hiernach wird das Axiom aufgestellt:

Ax. IV. Wenn eine Seite eines beliebigen Dreiecks unbegrenzt klein wird, so wird die Differenz der beiden anderen Seiten ebenfalls unbegrenzt klein,

und daraus werden folgende Sätze hergeleitet:

»Wenn zwei Punkte A und B einen Punkt C zum Grenzpunkt haben, so strebt ihr Segment auf jeder durch sie gehenden Geraden der Null zu. Wenn eine Punktreihe (X_n) einen Grenzpunkt L hat, so nimmt das Segment $(X_n X_{n+r})$ bei konstantem r und unbegrenzt wachsendem n unbegrenzt ab. Der Punkt X_n der Reihe (X_n), welche L zum Grenzpunkt hat, kann sich bei unbegrenzt wachsendem n nur dem Punkte L unbegrenzt nähern. Wenn der Abstand eines Punktes R von den Punkten X einer Geraden unbegrenzt abnimmt, so gehört der Punkt R der Geraden an.«

»Wenn eine Punktgruppe (A) der Geraden derart gegeben ist, dafs,

1. wählt man ein beliebiges Segment, dessen Enden Punkte der Gruppe sind, die Enden der konsekutiven diesem System gleichen Systeme in der gegebenen Richtung von jedem Punkte der Gruppe als Anfang an, der Gruppe selbst angehören,

2. ein Punkt A um (A) nicht einen ersten konsekutiven Punkt der Gruppe in jeder Richtung hat, so giebt es in jedem willkürlich kleinen Segment der Geraden stets einen Punkt der Gruppe.«

Von diesen Sätzen aus gelangt der Verfasser, allerdings erst noch durch zahlreiche Zwischenstufen hindurch, zu folgendem Ergebnis:

»Wenn die Gerade offen ist, so bestimmt jedes Punktepaar die Gerade. Wenn die Gerade geschlossen ist, so wird sie durch zwei beliebige ihrer Punkte bestimmt mit Ausnahme des möglichen Falles, dafs diese Punkte entgegengesetzt sind (d. h. dafs die geschlossene Linie durch die beiden Punkte halbiert wird).«

2. Nachdem auf diesem etwas weitläufigen Wege die Theorie der Geraden zum Abschlufs gebracht ist, aber zugleich zahlreiche Sätze bewiesen sind, die in den folgenden Abschnitten fortwährend benutzt werden, wird ein Gedanke entwickelt, der an sich ganz einfach ist, der auch schon in anderen Werken manche Anwendung gefunden hat, dessen konsequente Durchführung aber für das Veronesesche System charakteristisch ist. Dieser Gedanke besteht darin, dafs mit einer Figur jedesmal die Gesamtheit aller durch irgend zwei ihrer Punkte begrenzten geraden Segmente betrachtet wird. Hierbei stützt sich der Verfasser auf folgende Sätze:

»Jede Figur gehört einer geradlinigen Figur an. In zwei gleichen Figuren ... ABC ... M ... und ... A'B'C' ... M' ... sind die durch Gruppen sich entsprechender Punkte bestimmten Figuren gleich. Zwei geradlinige, durch andere gleiche Figuren bestimmte Figuren ... ABC ... M ... und ... A'B'C' ... M' ... sind gleich, wenn sich zwischen ihren Punkten ein eindeutiger Zusammenhang derart feststellen läfst, dafs die geradlinigen Segmente (und damit auch die Abstände) der entsprechenden Punkte

der Reihe nach gleich sind. Zwei Figuren, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.«

Zu den einfachsten Figuren ist das Strahlenpaar und das Geradenpaar zu rechnen, von denen das erstere aus zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen (Halbgeraden), letzteres aus zwei sich schneidenden Geraden besteht. Mit jedem Strahlenpaar wird das Scheitelpaar zusammengestellt. Der Verfasser beweist folgende Sätze:

»Wenn zwei Geradenpaare gleich sind, so mufs in ihrem Identitätszusammenhang erstens dem Schnittpunkt des einen der Scheitelpunkt des zweiten entsprechen; zweitens entspricht einem Strahl oder einer Richtung der Geraden des einen Paares ein bestimmter Strahl der Geraden des zweiten Paares; drittens bestimmen zwei sich entsprechende Punktepaare gleiche Segmente. Wenn zwei Strahlenpaare gleich sind, so sind auch die Scheitelpaare gleich. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn zwei Seiten und das durch sie bestimmte Paar bezüglich gleich sind.«

An dieser Stelle glaubt Veronese sein fünftes Axiom aufstellen zu müssen, dem er folgenden Ausdruck giebt:

Ax. V. Wenn man in zwei Strahlenpaaren AB, AC und A′B′, A′C′ zwei Punktepaare B und C, B′ und C′ derart auswählt, dafs (AB) = (A′B′), (AC) = (A′C′) ist, und wenn dann das Segment (BC) mit dem Segment (B′C′) identisch ist, so sind die beiden Strahlenpaare identisch.

Daraus ergeben sich folgende Sätze:

»Das Strahlenpaar (ab) ist dem Paar (ba) gleich. Zwei Scheitelpaare von Strahlen sind gleich. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn ihre Seiten zu je zweien bezüglich gleich sind. Wenn die Summe der Abstände eines Punktes von zwei Punkten dem Abstande dieser Punkte gleich ist, so liegen die drei Punkte in gerader Linie.«

3. Auf den weiteren Inhalt des Werkes können wir nicht in gleicher Ausführlichkeit eingehen, wie wir es soeben für einen nicht eben grofsen Abschnitt gethan haben. Wir möchten nur bemerken, dafs selbstverständlich die Gerade auch in Bezug auf die verschiedenen Einheiten untersucht wird. Die Lobatschewskysche Geometrie, die nach der Meinung des Verfassers mit seinen allgemeinen Hypothesen nicht vereinbar ist, wird nicht eigens

behandelt; Veronese begnügt sich damit, einige Eigenschaften ihrer Ebene mitzuteilen. Dagegen wird die Euklidische und die Riemannsche Geometrie recht ausführlich besprochen. Bei dem Ausgangspunkte, den der Verfasser gewählt hat, weicht die Beweisführung durchweg von der gebräuchlichen ab; er ist daher genötigt, alle Beweise in voller Ausführlichkeit zu entwickeln. Wie bemerkt, können wir ihm auf diesem Wege aus mancherlei Gründen nicht folgen. Wir ziehen es daher vor, kurz darzulegen, worin wir das Charakteristische seiner Methode erblicken, und dasjenige hervorzuheben, was wir als den hervorstechenden Vorzug des Werkes ansehen möchten. Wir hoffen uns dabei, wenn auch die Färbung etwas subjektiv sein mag, von dem Wesen seiner Anschauungen nicht zu weit zu entfernen. Dabei müssen wir auch diejenigen Teile wieder berücksichtigen, von denen wir eben bereits einen kurzen Abrifs gegeben haben.

4. Veronese glaubt die Bewegung aus der reinen Geometrie verbannen zu müssen; die Benutzung eines festen Körpers scheint ihm der Würde der Wissenschaft ganz zu widerstreiten. Dagegen erachtet er es für das angemessenste, sein ganzes System auf Hypothesen und Axiome zu gründen, die an sich rein willkürlich sind und nur der Bedingung genügen, dafs die späteren weder aus den vorangehenden folgen noch ihnen widerstreiten. Demnach mufs er zunächst eine arithmetische Grundlage schaffen; er untersucht also in der Einleitung die Zahl, die Grundform, sowie die unbegrenzt grofsen und unbegrenzt kleinen Segmente. In der Geometrie bildet ebenfalls der Begriff der Gleichheit den eigentlichen Grundbegriff, aber das Interesse wendet sich sogleich von Anfang an der Geraden als der geometrischen Grundfigur zu. Veronese setzt ihre Existenz voraus und nimmt an, dafs man jede gerade Strecke messen und dementsprechend Segmente verschiedener Geraden mit einander vergleichen kann. Auf die Gerade wird auch jede andere Figur zurückgeführt, indem je zwei Punkte derselben durch eine Gerade verbunden und das zwischen ihnen enthaltene Segment betrachtet wird; das neue, auf diese Weise erhaltene Gebilde wird als eine geradlinige Figur bezeichnet. Um demnach zwei verschiedene Figuren mit einander zu vergleichen, werden die aus ihnen hervorgehenden geradlinigen Figuren mit einander verglichen. Kann zwischen den einzelnen

Punkten der gegebenen Figuren eine eindeutige Zuordnung derartig hergestellt werden, dafs das von irgend zwei Punkten der ersten Figur begrenzte Segment jedesmal dem zwischen den entsprechenden Punkten der anderen Figur enthaltenen Segmente gleich ist, so sind die Figuren selbst gleich. Die Möglichkeit, auf diese Weise die Gleichheit zu bestimmen, ergiebt sich aus dem fünften Axiom, welches im wesentlichen darauf hinauskommt, den dritten Kongruenzsatz Euklids axiomatisch als richtig vorauszusetzen. Im Anschlufs daran wird zuerst das Strahlenpaar untersucht; darauf geht die Untersuchung zum Strahlenbüschel und von da zur Ebene über; die aufgestellten Principien gestatten leicht, die Gleichheit beliebiger ebener Figuren zu begründen. Der Übergang zum dreidimensionalen Raume läfst sich sehr einfach dadurch bewerkstelligen, dafs man von einem Punkte aus alle Geraden nach den Punkten einer Ebene zieht, die den gegebenen Punkt nicht enthält. In entsprechender Weise läfst sich der Raum von n Dimensionen gewinnen. Als besondere Vorzüge müssen wir die Einheitlichkeit der Behandlung und die Einheitlichkeit der Beweisführung rühmen: fast regelmäfsig wird das neue Gebilde erhalten, indem man zwischen den Punkten bereits bekannter Gebilde gerade Linien zieht, und der Beweis gründet sich fast regelmäfsig auf das fünfte Axiom.

5. Indessen gelangt man auf diesem Wege zunächst nur zu gleichen Figuren, also zu Gebilden, die in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen. Die Geometrie teilt aber derartige Gebilde in kongruente und symmetrische Figuren ein: wenn zwei Figuren in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen, so unterscheidet man noch, ob sie zur Deckung oder in symmetrische Lage gebracht werden können. Man sollte denken, es werde kaum möglich sein, auf dem angegebenen Wege, der wesentlich nur die Messung gerader Strecken benutzt, diesen Unterschied begründen zu können. Um so angenehmer wird man überrascht, zu sehen, wie leicht es Veronese wird, diese Schwierigkeit zu beseitigen. In der Ebene genügt folgende Betrachtung. Den Umfang eines Dreiecks ABC kann man in doppelter Weise beschreiben: entweder von A nach B, von B nach C und von da nach A zurück, oder in der umgekehrten Richtung von A nach C, von C nach B und von da nach A. Jedesmal ist es gleichgültig,

an welcher Stelle man die Bewegung beginnen läfst. Um die erstere Richtung zu kennzeichnen, bezeichnen wir das Dreieck durch die Folge ABC oder BCA oder CAB, während jede andere Permutation die andere Art des Umlaufs darstellt. Jeder Winkel des Dreiecks soll in demselben Sinne beschrieben werden, in dem man die gegenüberliegende Seite durchlaufen denkt. Dem zuerst angegebenen Sinne entspricht es daher, wenn der Winkel BAC in der Richtung von AB nach AC, der Winkel CBA in der Richtung von BC nach BA durchlaufen wird. Den so bestimmten Winkeln eines Dreiecks wird gleicher Sinn oder gleiche Richtung beigelegt. Die Richtung eines Winkels bestimmt aber auch die Richtung eines Büschels, dessen Scheitel mit dem des Winkels zusammenfällt. Diese beiden Festsetzungen erlauben, nachdem die Richtung eines Winkels gegeben ist, jedem anderen Winkel in der Ebene eine feste Richtung zuzuweisen. Man braucht nur ein beliebiges Dreieck zu benutzen, von dem zwei Eckpunkte in die Scheitel der beiden Winkel hineinfallen. Es zeigt sich, dafs die Zuordnung von der Wahl des dritten Eckpunktes unabhängig ist, und dafs zwei Winkel, welche zu demselben dritten Winkel gleiche Richtung haben, auch unter einander gleiche Richtung besitzen. Man kann daher auch von dem Sinn einer Ebene sprechen und denselben durch irgend einen Winkel bestimmen. Dem entsprechend werden gleiche ebene Figuren, welche denselben Sinn haben, kongruent genannt, während gleiche Figuren von entgegengesetztem Sinn symmetrisch heifsen.

In ähnlicher Weise verfährt Veronese im dreidimensionalen Raume. Zunächst wird auf dieselbe Weise, wie der Sinn einer Ebene durch einen ihrer Winkel, so auch der Sinn eines Strahlenbündels durch den Sinn eines seiner Keile (Winkel zwischen zwei Ebenen) bestimmt. Durch die Richtung, die man einem Keile eines Tetraeders beilegt, ist demnach die Richtung (der Sinn) für diejenigen beiden Strahlenbündel bestimmt, deren Scheitel in der Ache des Keils liegen. Wir sind somit genötigt, die Richtungen in den beiden Bündeln als gleich anzusehen. Ein einzelner Keil eines Tetraeders bestimmt hiernach die Richtungen der übrigen Keile des Tetraeders. Der doppelte Sinn, den man dementsprechend dem Tetraeder beilegen kann, hängt aber zusammen mit der Folge, in der man die vier Eckpunkte schreibt. So möge

die Folge ABCD bezeichnen, dafs für den von A ausgehenden Strahlenbündel die Reihe B, C, D bestimmend ist, dafs also für den Keil, dessen Achse AB ist, die Ebene ABC längs der Kante CD in die Ebene ABD übergeführt werden soll; ebenso soll die Ebene ACD in die Lage ACB übergehen längs DB. Dieselbe Bezeichnung des Tetraeders verlangt, dafs für den Keil, dessen Achse BC ist, die Ebene BCD längs der Kante DA in BCA übergeht. Jede gerade Permutation der Buchstaben A, B, C, D führt auf dieselbe Richtung des Tetraeders.

Diese Festsetzung gestattet, nachdem ein Keil und seine Richtung gegeben ist, jedem anderen Keil eine gewisse Richtung beizulegen, die der gegebenen gleich sein soll. Wir können daher im dreidimensionalen Raume selbst zwei Richtungen unterscheiden und nennen wiederum gleiche Figuren von demselben Sinne kongruent, gleiche Figuren von entgegengesetztem Sinne symmetrisch.

6. Hiermit glauben wir die wichtigste Seite des Werkes genügend skizziert zu haben. Wie wir früher gesehen haben, haben die Alten die Kongruenz beliebiger geradliniger Figuren auf die von Dreiecken zurückgeführt und demnach die Bewegung für den weiteren Aufbau vielfach entbehrlich gemacht, nachdem sie zum Beweise des ersten Kongruenzsatzes benutzt war. Indessen wurde es bei der Untersuchung krummer Gebilde fast regelmäfsig wieder notwendig, auf die Bewegung direkt zurückzugehen. Auch konnte der Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Gebilden, selbst bei Benutzung kongruenter Dreiecke, nicht begründet werden, ohne offen oder versteckt die Bewegung anzuwenden. Dem gegenüber bedeutet Veroneses Werk einen ganz aufserordentlichen Fortschritt, für den alle Mathematiker, die sich nicht blofs für die Resultate, sondern auch für die Grundlage ihrer Wissenschaft interessieren, dem Verfasser in hohem Grade dankbar sein werden. Nachdem die Theorie der geraden Linie begründet ist, gelingt es ohne Benutzung der Bewegung, die Geometrie einwurfsfrei aufzubauen und sogar die starre Bewegung zu beschreiben.

7. Trotz der hohen Bedeutung, die hiernach Veroneses Werk besitzt, mufs man zum mindesten Verwahrung dagegen einlegen, dafs der Verfasser an vielen Stellen sein System als das einzig berechtigte hinstellt. Selbst wenn es ihm gelungen wäre, von

seinen Principien aus fehlerlose Definitionen aufzustellen und wirklich strenge Beweise zu liefern, so würde sein System meines Erachtens eben dieselbe Bedeutung haben wie andere Systeme, die sich einer gleichen Strenge rühmen können. Wir wären also noch immer berechtigt, zu versuchen, ob es nicht gelingt, auf einem anderen Wege eine ebenso einwurfsfreie Grundlage zu schaffen. Nun aber giebt Veroneses Werk zu den schwersten Bedenken Veranlassung.

Ich will nicht nochmals auf die arithmetische Grundlage, die Einleitung, eingehen; ich mufs aber an erster Stelle hervorheben, dafs der Begriff der Gleichheit von Figuren ganz allgemein vorausgesetzt wird, ohne dafs dafür ein wirkliches Kennzeichen angegeben wird. Wenn es aber von vornherein klar ist, was es heifst, zwei Figuren sind im Veroneseschen Sinne gleich, so bedingt es schliefslich keinen bedeutenden Fortschritt mehr, dafs die Unterscheidung der gleichen Figuren in kongruente und symmetrische begründet werden kann. Auch müssen wir befürchten, dafs die Beweise manche Lücke aufweisen, wenn ein so komplizierter Begriff ohne jede nähere Bestimmung zur Grundlage des ganzen Systems gewählt wird. Nun denke man aber nicht, der Begriff der Gleichheit werde nur für die gerade Linie gefordert; nachdem er in dieser Beschränkung vorausgesetzt sei, führe der Verfasser mit Hilfe seiner geradlinigen Figuren darauf die Gleichheit beliebiger Gebilde zurück. Bei Veronese ist die Behauptung, zwischen gleichen Figuren könne ein eindeutiges Entsprechen von Punkten derart festgesetzt werden, dafs jedesmal das zwischen irgend zwei Punkten der einen Figur enthaltene geradlinige Segment dem zwischen den entsprechenden Punkten der anderen Figur enthaltenen Segment gleich sei, keine Definition, sondern ein Lehrsatz. Das entspricht auch der ganzen Anlage des Werkes und speciell der Definition der Geraden, welche mit dem Kreise und der Schraubenlinie als ein in der Position seiner Teile gleiches System von einer Dimension vorausgesetzt wird.

8. Sollen die Voraussetzungen, auf denen man die Geometrie aufbauen will, naturgemäfs sein, so müssen sie auf alle Raumformen führen, die mit der Erfahrung vereinbar sind. Das ist aber bei Veronese nicht der Fall. Um wenigstens neben der Euklidischen noch die Riemannsche Geometrie zu erhalten, führt

er seine sechste Hypothese ein, obwohl dieselbe, wie er selbst sagt, für die Euklidische Geometrie nur eine blofse Übereinkunft ist. Aber hierdurch wird die Polarform des Riemannschen Raumes ausgeschlossen, die an sich gleiche Berechtigung mit der Riemannschen Raumform hat, wenn auch ihre Bedeutung für die Räume höherer Dimension geringer ist. Von der Lobatschewskyschen Geometrie sagt Veronese ausdrücklich, dafs sie mit seinen Hypothesen unvereinbar sei.

Wie steht es aber mit den Clifford-Kleinschen Raumformen? Man denke nicht etwa, dafs sie deshalb fehlen, weil die darauf bezügliche Mitteilung Kleins Veronese bei der Abfassung seines Werkes nicht bekannt sein konnte; die deutsche Ausgabe will auch die neueren Erscheinungen berücksichtigen und erwähnt in der That die Arbeit Kleins an mehreren Stellen. Die genannten Raumformen können eben in Veroneses System keinen Platz finden, schon aus dem Grunde nicht, weil von vornherein der Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Demnach ist jeder, der die Berechtigung dieser Raumformen anerkennt, genötigt, Veroneses System zu verwerfen.

Im ersten, zweiten und sechsten Abschnitte unseres Werkes (B. 1. S. 80—89, 142—162 und B. 2. S. 121—156) traten uns für einen begrenzten Teil des Raumes die parabolische, die elliptische und die hyperbolische Geometrie als gleichberechtigt entgegen. Zu demselben Ergebnis wird uns der folgende Abschnitt führen. Für Veronese sind nur der Euklidische und der Riemannsche Raum berechtigt, und zwar auch nur infolge einer rein äufserlichen Festsetzung. Ein Band, welches sich uns von den verschiedensten Seiten her als natürlich, ja als notwendig darstellt, ist hier vollständig zerrissen — Beweis genug, dafs wir es nur mit künstlichen, nicht mit natürlichen Voraussetzungen zu thun haben.

Ich möchte sogar noch weiter gehen. Bei der engen Beziehung, die zwischen den eigentlichen Raumformen und denjenigen Wissenschaften besteht, die ich im uneigentlichen Sinne auch noch als Raumformen bezeichne (§ 11), kann ein Ausgangspunkt nur dann als natürlich angesehen werden, wenn er auch zu den letzteren führt. Das ist bei Veronese ganz ausgeschlossen; im Gegenteil, ihm ist es nicht einmal möglich, die projektive

Geometrie selbständig zu begründen. In derjenigen zweidimensionalen Raumform, die Helmholtz zuerst betrachtet hat und in der die Abstandsfunktion die Gestalt erhalten kann:

$$\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]e^{\alpha \operatorname{arctg}\frac{x-x'}{y-y'}}$$

gilt doch, soweit sich irgend übersehen läfst, der Begriff der Gleichheit in demselben Sinne wie in der Euklidischen Geometrie. Da aber hier die Veroneseschen Sätze über gleiche Figuren ihre Gültigkeit verlieren, so mufs der wahre Grund für diese auffallende Erscheinung ermittelt werden, wenn man nicht gezwungen sein will, diesen Sätzen jede Berechtigung abzusprechen.

9. Hiermit hängt folgendes Bedenken zusammen. Die Geometrie mufs, wie sie von den Bedürfnissen des Lebens ausgegangen ist, auch in ihren Grundlagen den Zusammenhang mit der Praxis nicht verleugnen, sie mufs mit anderen Worten auch von ihrer rein wissenschaftlichen Seite her die Grundlage für die Mechanik, die Astronomie und die Physik bilden. Bei Veronese ist aber der Zusammenhang mit diesen Wissenschaften ganz zerrissen; derselbe mufs künstlich durch neue Voraussetzungen hergestellt werden, die aufserhalb der geometrischen Wissenschaft liegen und deshalb geradezu als praktische Axiome bezeichnet werden. Veronese benutzt zu dem Zwecke die folgenden drei:

I. In dem Gebiet unserer aktuellen Beobachtungen gilt mit sehr grofser Annäherung die Eigenschaft, dafs durch einen Punkt nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden geht.

II. Die Punkte einer beliebigen Figur können sich frei und unabhängig von einander bewegen, indem jeder eine intuitive Linie beschreibt, so jedoch, dafs die Lagen der Punkte der Figur eindeutig und in derselben Ordnung den successiven Lagen entsprechen, wobei nicht ausgeschlossen ist, dafs mehrere Punkte denselben Ort in einer successiven Lage einnehmen.

III. Der Anschauungsraum ist eine Figur von drei Dimensionen bezüglich seiner Punkte.

Aufserdem ist für die praktische Anwendung noch das folgende Axiom bestimmt:

Ein Körper kann sich ohne Deformation bewegen.

Statt auf diese Axiome näher einzugehen, begnüge ich mich mit folgender Bemerkung.

Der italienische Gelehrte meint, jede Rücksichtnahme auf die Erfahrung verletze die Würde der Geometrie als einer reinen Wissenschaft. Vielleicht darf man mit gröfserem Rechte sagen, der Ausgang von willkürlichen Annahmen sei einer Wissenschaft unwürdig. Jedenfalls kann aber die Aufstellung von Voraussetzungen, die in der That oder scheinbar den Charakter der Willkür an sich tragen, nur dann Interesse beanspruchen, wenn man von ihnen aus in voller Strenge zur Erfahrung gelangt. Aber alsdann mufs man erstens auf alle Möglichkeiten geführt werden, die mit der Erfahrung vereinbar sind, und zweitens mufs die Übereinstimmung nicht erst durch ein willkürliches Axiom postuliert werden.

§ 10.

Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.

Nachdem wir in den vorangehenden Paragraphen mehrere Versuche, eine genügende Grundlage der Geometrie zu schaffen, eingehend besprochen haben, möchten wir jetzt dazu übergehen, diejenigen Begriffe und Urteile anzugeben, die unseres Erachtens am natürlichsten zur Grundlage der Geometrie gewählt werden. Wir glauben jedoch einige Bemerkungen vorausschicken zu sollen.

Dafs die Geometrie gewisse Sätze unbewiesen voraussetzen und darauf den Beweis für ihre weiteren Sätze stützen müsse, ist von jeher anerkannt. Aber ganz Entsprechendes gilt für die Begriffe. Die Bildung von Begriffen geschieht in der Geometrie durch Definitionen, deren Wesen darin besteht, mehrere Begriffe zu einem einzigen neuen zu verbinden. Daraus folgt, dafs auch die Bildung von Definitionen einmal ihre Grenze findet, und dafs gewisse Begriffe, ohne selbst definiert werden zu können, allen Definitionen zu Grunde liegen; sie mögen als Grundbegriffe der Geometrie bezeichnet werden. Damit dieser Name einem System von Begriffen beigelegt werden kann, hat dasselbe somit drei Bedingungen zu genügen: erstens mufs jeder dieser Begriffe für die Geometrie notwendig sein, zweitens mufs das System nicht auf eine geringere Zahl von Begriffen zurückgeführt werden können, und drittens zur Gewinnung aller geometrischen Begriffe ausreichen.

Mit der Aufstellung der Grundbegriffe ist aber die Möglichkeit von Definitionen keineswegs gegeben. Bevor man mehrere Begriffe zu einer Definition zusammenstellt, mufs die Möglichkeit erkannt sein, sie überhaupt zu verbinden, und weil die Verbindung einen neuen Begriff ergeben soll, darf die Verbindung nicht notwendig sein. Ferner kann in vielen Fällen eine Definition nicht unmittelbar in voller Allgemeinheit aufgestellt werden, sondern sie benutzt einen Hilfsbegriff, der, wenigstens scheinbar, speciellen Charakter hat; in diesen Fällen ist es nötig, nachzuweisen, dafs der neue Begriff allgemeine Gültigkeit besitzt. So erkennen wir, dafs jede Definition bereits gewisse Urteile voraussetzt. Diejenigen Urteile (Sätze), welche nicht durch Beweise auf andere zurückführbar sind, bilden somit die Grundlage für die Definitionen und für die weiteren Urteile; es möge gestattet sein, sie als Grundsätze der Geometrie zu bezeichnen.

Als Grundbegriffe der Geometrie stellen wir die folgenden auf:

Feste Körper, Teile eines Körpers, Raum, Teile eines Raumes, einen Raum einnehmen (decken), Zeit, Ruhe, Bewegung.

Wir brauchen nicht nochmals hervorzuheben, dafs wir keineswegs behaupten wollen, der Zugang zur Geometrie sei nur von diesen Begriffen aus möglich; unsere Ansicht geht nur dahin, dafs diese Begriffe gut geeignet sind, zur Grundlage der Geometrie zu dienen. Im einzelnen bemerken wir noch folgendes.

Über die Bewegung haben wir im fünften Abschnitt eingehend gehandelt; mit ihr ist ihr Gegensatz, die Ruhe, zugleich verlangt.

Setzen wir den Begriff der Bewegung, so kann auch der Zeitbegriff nicht entbehrt werden. Die Bewegung selbst verlangt aber einen bewegenden Gegenstand. Da das der unbewegliche Raum nicht sein kann, so müssen wir mit der Bewegung auch den Körper unter die Grundbegriffe aufnehmen. Diejenige Vergleichung von Raumteilen, welche in der Geometrie benutzt wird, kann aber nicht durch Bewegung eines luftförmigen oder flüssigen Körpers, sondern nur durch die eines absolut starren Körpers vermittelt werden. Da die Notwendigkeit der Teilung von jeher allgemein anerkannt ist, bedürfen die weiter aufgestellten Begriffe keine Rechtfertigung.

Dabei müssen wir jedoch zugestehen, dafs einige dieser Begriffe für unsere Wissenschaft mehr den Charakter von Hilfsbegriffen haben. Das gilt vor allem von der Zeit, betreffs deren es der Geometrie nur auf das »zugleich, vorher und nachher« ankommen kann. Auch der feste Körper wird nicht an sich gebraucht, sondern nur insofern, als mit seiner Hilfe weitere Begriffe hergeleitet werden.

Die aufgestellten Begriffe dürfen nur dann als Grundbegriffe bezeichnet werden, wenn sie nicht auf eine geringere Zahl von Begriffen zurückgeführt werden können. Darüber in eingehende Erörterungen einzugehen, wird wohl nicht nötig sein.

Endlich mufs gezeigt werden, dafs die Begriffe vollständig genügen. Dieser Nachweis kann erst durch den wirklichen Aufbau der Wissenschaft geführt werden, und der ist zur Zeit noch nicht möglich.

Wir wenden uns jetzt den Grundsätzen der Geometrie zu. An erster Stelle beachten wir die Ausdehnung und die Undurchdringlichkeit der Körper und fassen diese beiden Eigenschaften in einem Grundsatze zusammen:

I. Jeder Körper nimmt zu jeder Zeit einen Raum ein; den von einem Körper eingenommenen Raum kann nicht gleichzeitig ein anderer Körper decken.

Die Geometrie bedarf der unbegrenzten Teilung eines jeden Körpers. Aber die geometrische Teilung ist von der mechanischen wesentlich verschieden, indem die letztere die Teile von einander trennt, während bei der geometrischen Teilung die Teile als dem Ganzen anhaftend gedacht werden können. Wenn z. B. zwei Lagen desselben Körpers einen Raumteil gemeinschaftlich haben, in einem anderen aber nicht übereinstimmen, so ist dadurch geometrisch eine Teilung des Körpers ausgeführt; man unterscheidet denjenigen Teil des Körpers, dessen zweite Lage von dem Körper in der ersten Lage noch mit eingenommen wurde, von demjenigen Teile, dessen zweite Lage der ersten Lage des Körpers nicht angehört. Demnach ist die Forderung einer unbegrenzten geometrischen Teilung mit der physikalischen Annahme von Molekeln und Atomen ganz vereinbar.

II. Jeder Raum (Körper) kann geteilt werden; jeder Teil eines Raumes (Körpers) ist wiederum ein Raum

(Körper); ist A ein Teil von B und B ein Teil von C, so ist auch A ein Teil von C, wo man unter A, B, C sowohl Räume als Körper verstehen kann.

Die Unabhängigkeit des Raumes von dem ihn einnehmenden Körper führt zu folgendem Grundsatze:

III. Jeder Körper kann bewegt werden; wenn ein Körper zu einer Zeit den früheren Raum eines zweiten Körpers deckt, so kann er zur Deckung mit jedem Raume gebracht werden, welchen der zweite zu irgend einer Zeit einnimmt.

Dieser Grundsatz erlaubt die Definition der Kongruenz für Räume und für Körper, indem er diesen Begriff von der Zeit, und für Räume von dem benutzten Körper, dagegen für Körper von dem gerade gedeckten Raume unabhängig macht. So werden wir zwei Räume als kongruent bezeichnen, wenn derselbe Körper beide Räume decken kann; ebenso können kongruente Körper zur Deckung desselben Raumes gebracht werden. Der von einem Körper eingenommene Raum wird mit Rücksicht auf die Beweglichkeit des Körpers als seine Lage bezeichnet. Diesem Grundsatz entsprechend sieht die Geometrie ganz von dem Stoffe der Körper ab; nur in diesem Sinne darf der zuweilen gebrauchte Ausdruck verstanden werden, die Geometrie betrachte den Raum als leer.

IV. Jeder Körper läfst sich so bewegen, dafs ein Teil desselben mit einem Teile eines beliebigen Raumes zur Deckung gelangt.

M sei der gegebene Raum; a sei der bewegte Körper, A der Raum, welchen er nach der in diesem Grundsatz geforderten Bewegung deckt; dann sind vier Fälle möglich: A und M sind vollständig identisch, oder A ist ein Teil von M, oder M ist ein Teil von A, oder viertens A und M haben einen Teil gemeinschaftlich, während ein Teil von A nicht zu M und ein Teil von M nicht zu A gehört. Wenn einer dieser vier Fälle angenommen wird, ohne dafs entschieden werden soll, welcher es ist, wollen wir sagen, der Körper a sei mit dem Raume M in teilweiser Deckung.

A sei eine Lage eines Körpers a, welche mit einem Raume keinen Teil gemeinschaftlich hat; dagegen soll a auch eine Lage

A_1 erhalten können, welche ganz ein Teil von M ist; dann giebt es für denselben Körper a auch eine Lage A′ von der Beschaffenheit, dafs ein Teil von A′ dem Raume M angehört, ein anderer Teil von A′ aber nicht; bei jeder Bewegung, welche den Körper a von A nach A_1 überführt, erlangt er eine Lage, wie sie für A′ angegeben wurde. Diesem Satze geben wir folgenden Ausspruch:

V. Wenn ein Körper vor seiner Bewegung keinen Teil mit einem Raume gemeinschaftlich hat, aber nach derselben diesem Raume ganz angehört, so erlangt er bei seiner Bewegung eine Lage, in welcher nur ein Teil von ihm dem Raume angehört.

Der Raum A sei beliebig in die beiden Teile M und N zerlegt; dann läfst sich immer ein Körper k bestimmen und mit demselben eine Bewegung ausführen, welche folgenden Bedingungen genügt: bei Beginn der Bewegung soll k einen Teil von M, am Ende derselben einen Teil von N decken, und während der Bewegung soll k und jeder Teil von k immer dem Raum angehören. Dies liefert den Grundsatz:

VI. Wenn ein (zusammenhangender) Raum A in irgend zwei Teile M und N zerlegt ist, so läfst sich immer ein Körper k bestimmen, welcher so bewegt werden kann, dafs während der Bewegung kein Teil des Körpers den Raum A verläfst, und k bei Beginn der Bewegung einen Teil von M und am Schlufs derselben einen Teil von N deckt.

Wenn ein Raum A in zwei Teile M und N zerlegt ist, so nennen wir diese beiden Teile zusammenhangend. Überhaupt bezeichnen wir zwei Räume, die keinen Teil gemeinschaftlich haben, als zusammenhangend, wenn sie nach dem vorangehenden Grundsatze als die Teile eines einzigen Raumes betrachtet werden können.

VII. Sobald ein Teil a eines festen Körpers wieder in eine solche Lage kommt, dafs jeder Teil von a in teilweise Deckung mit seiner Anfangslage gelangt, so erhält jeder Teil des Körpers seine Anfangslage wieder.

Hiernach nimmt der Begriff der Lage eine genauere Bedeutung an, als demselben durch den dritten Grundsatz gegeben wurde.

Zwei Lagen desselben Körpers sind nur dann als identisch zu bezeichnen, wenn nicht nur der Körper als Ganzes, sondern auch jeder beliebige Teil desselben beidemal denselben Raum deckt.

Wir haben jetzt nachzuweisen, dafs die aufgestellten Grundsätze von einander unabhängig sind. Dafs keiner der späteren in einem früheren enthalten ist, ergiebt sich daraus, dafs die früheren Sätze auch für solche Vorstellungen gelten, welche mit den folgenden nicht vereinbar sind. »Einen Raum einnehmen« ist verbunden mit dem »Bestehen aus einem Stoffe«; ebenso zerlegt die Teilung eines Körpers auch den Stoff; aber die Möglichkeit, denselben Raum zu decken, erfordert nicht die Gleichartigkeit des Stoffes; daher folgt der Grundsatz III nicht aus den Sätzen I und II. Im zweiten Satze könnte »teilen« durch »zusammenfügen« und »einen Teil bilden« durch »in sich fassen« ersetzt werden; aber diese Vorstellung fällt bei IV weg. Während III und IV nur das Ergebnis einer Bewegung betrachten, stellt V den Verlauf derselben dar, indem ihr die Stetigkeit beigelegt wird. Alle diese Sätze bleiben bestehen, wenn man einen einzelnen Körper durch eine Zusammenstellung mehrerer Körper und einen Raum durch eine Zusammenstellung getrennter Räume ersetzt, eine Vorstellung, welche durch VI ausgeschlossen wird. Ebenso kann man mit den sechs ersten Sätzen die Vorstellung von flüssigen und luftförmigen Körpern verbinden; erst VII fügt die feste Verbindung der einzelnen Teile hinzu. Umgekehrt sieht man aber auch, dafs die ersten Grundsätze nicht durch die späteren überflüssig gemacht werden; ich will den Nachweis nicht im einzelnen durchführen, sondern nur bemerken, dafs die späteren Sätze fast immer einen von den früheren bereits voraussetzen.

Ob aber diese Sätze für den Aufbau hinreichend sind, möchte ich jetzt nicht mehr fest behaupten; im Gegenteil will es mir in der letzten Zeit scheinen, der Begriff der Stetigkeit müsse schärfer entwickelt werden, als es hier durch den fünften Grundsatz geschieht. Indessen ist es mir bisher nicht gelungen, hierüber zur Klarheit zu kommen; noch weniger kann ich bereits jetzt eine etwa vorhandene Lücke in genügender Weise ausfüllen.

§ 11.

Die allgemeinen Raumformen.

1. Dafs die aufgestellten Begriffe und Urteile, die wir als Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie bezeichnen, für die im ersten Bande behandelten dreidimensionalen Raumformen Gültigkeit besitzen, braucht gar nicht erwähnt zu werden. Wir können aber auch leicht zeigen, dafs diese Begriffe und Urteile, wenn auch nicht die mit ihnen verbundenen Vorstellungen, für die mehrdimensionalen Raumformen gelten. Im Anschlufs an die im ersten Bande (S. 191—205) durchgeführte analytische Behandlung des n-dimensionalen Euklidischen Raumes bezeichnen wir wieder die Gesamtheit der Wertsysteme $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, wobei die einzelnen Veränderlichen alle reellen Werte annehmen können, als den Raum und nennen ein stetiges endliches Gebiet dieser Mannigfaltigkeit einen Raumteil; dabei setzen wir voraus, dafs sich die in Betracht gezogenen Wertsysteme nicht durch eine geringere Zahl von Variabeln darstellen lassen. Demnach bezeichnet hier das Wort Raumteil dasselbe, was wir im vorigen Paragraphen kurz Raum genannt haben.

Ein Gebiet von Wertsystemen $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, welches ebenfalls endlich und stetig ist und dessen Bestimmungsgröfsen nicht durch stetige eindeutige Beziehungen auf eine geringere Zahl von Veränderlichen zurückgeführt werden können, möge ein Körper genannt werden. Um den Begriff der Deckung einzuführen, sollen zu n willkürlichen reellen Gröfsen $b_1 \ldots b_n$ weitere n^2 Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots n$ hinzugenommen werden, welche den Bedingungen genügen:

$$(1) \quad \sum_\varrho a_{\iota\varrho}^2 = 1, \quad \sum_\varrho a_{\iota\varrho}\, a_{\varkappa\varrho} = 0 \text{ für } \iota \lesseqgtr \varkappa,$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Lassen sich bei dieser Festsetzung die Gröfsen b_ι und $a_{\iota\varkappa}$ so wählen, dafs jedem Wertsysteme (x) des Raumteiles A ein Wertsystem (y) des Körpers k vermittelst der Gleichungen:

$$(3) \quad x_\iota = \sum_\varrho a_{\iota\varrho}\, y_\varrho + b_\iota \qquad (\iota = 1 \ldots n)$$

entspricht, so sagen wir, der Körper k decke den Raumteil A. Wenn aber in den Gleichungen (3) die Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ und b_ι stetige eindeutige Funktionen einer veränderlichen Gröſse t (für $t_0 < t < t_1$) sind, welche den Bedingungen (1) und (2) genügen, so soll diese analytische Operation die Bewegung des Körpers k vertreten, falls wir die Wertsysteme (y) auf das diesem Körper entsprechende Gebiet beschränken. Dies vorausgesetzt, wird, wie man leicht sieht, den aufgestellten Grundsätzen genügt; mit anderen Worten: Unsere Grundbegriffe und Grundsätze behalten ihre Gültigkeit in den Euklidischen Raumformen von beliebig vielen Dimensionen.

2. Um dasselbe für eine n-dimensionale Kleinsche Raumform (für die Polarform des Riemannschen Raumes) zu zeigen, setzen wir etwa fest, daſs die n veränderlichen Gröſsen $x_1 \ldots x_n$ nur solche reelle Werte annehmen, für welche

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$$

ist. Zur Darstellung eines Raumteiles werden wieder die Variabeln $x_1 \ldots x_n$, für einen Körper die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ benutzt. Entsprechend den Entwicklungen des ersten Bandes (S. 205—210), in denen wir k^2 den Wert eins beilegen, führen wir $(n + 1)^2$ Gröſsen $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n$ ein und verlangen, daſs zwischen ihnen die Beziehungen bestehen:

$$(5) \quad \sum_{\varrho=0}^{n} a_{\iota\varrho}\, a_{\varkappa\varrho} = \delta_{\iota\varkappa} \qquad (= 1 \text{ oder } = 0)$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{00} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Dadurch werden die Gröſsen $a_{\iota\varkappa}$ von $\frac{n\,(n + 1)}{2}$ willkürlichen Gröſsen abhängig gemacht. Der Kürze wegen führen wir noch die Gröſse y_0 ein durch die Festsetzung:

$$(7) \quad y_0 = \sqrt{1 - y_1^2 - \ldots - {}_n^2}.$$

Kann man jetzt die den Bedingungen (5) und (6) genügenden Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ so bestimmen, daſs nach passender Wahl des Vorzeichens von y_0 jedem Wertsystem (x) des Raumteiles A ein Wertsystem (y) des Körpers vermittelst der n Gleichungen:

$$(8) \quad x_\iota = \sum_{\varrho=0}^{n} a_{\iota\varrho}\, y_\varrho \qquad (\iota = 1 \ldots n)$$

zugeordnet wird, so sagen wir, der Körper k decke den Raumteil A. Man kann aber auch die Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ von einer veränderlichen Gröfse t abhängig machen und dadurch wiederum die Bewegung von k einführen.

In ähnlicher Weise verfahren wir für eine Lobatschewskysche Raumform. Neben den unbeschränkt veränderlichen reellen Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ und den Gröfsen $y_1 \ldots y_n$ benutzen wir noch die Gröfse $y_0 = \sqrt{1 + y_1^2 + \ldots + y_n^2}$, wo der Wurzel ihr positiver Wert beizulegen ist. An den Bedingungen (5) ist eine kleine Änderung anzubringen; im übrigen bleiben die vorigen Festsetzungen ungeändert.

Für den Riemannschen Raum ist es am einfachsten, zwischen $n + 1$ veränderlichen Gröfsen die früher benutzte Gleichung zweiten Grades (B. 1. S. 206) bestehen zu lassen.

3. Wir können aber unsere Grundbegriffe und Grundsätze auch auf die allgemeine Projektivität anwenden. Zu dem Ende legen wir $n + 1$ veränderliche Gröfsen x_0, $x_1 \ldots x_n$ zu Grunde, denen wir gestatten, alle reellen endlichen Werte mit Ausnahme des Wertsystems $(0, 0 \ldots 0)$ anzunehmen. Jedes einzelne Wertsystem bestimmen wir durch die Verhältnisse dieser Gröfsen; d. h. wir betrachten alle Wertsysteme als identisch, welche aus einem gegebenen, durch Multiplikation mit einer beliebigen, von null verschiedenen Zahl erhalten werden können. Zur Darstellung eines Raumteiles benutzen wir die Variabeln x_0, $x_1 \ldots x_n$, für einen Körper in entsprechender Weise die Variabeln y_0, $y_1 \ldots y_n$, indem wir auch bei den letzteren nur die Verhältnisse in Betracht ziehen. Wir sagen jetzt, der eine gewisse endliche und stetige Mannigfaltigkeit von Wertsystemen (y) enthaltende Körper k decke einen Raumteil A, wenn die dem Raumteile A angehörenden Wertsysteme (x) mit den Wertsystemen (y) des Körpers durch die Gleichungen verbunden sind:

$$(9) \quad x_\alpha = \sum_{\varrho=0}^{n} a_{\alpha\varrho}\, y_\varrho, \qquad (\alpha = 0, 1 \ldots 1)$$

wo die $(n + 1)^2$ Koefficienten $a_{\alpha\varrho}$ beliebige endliche Gröfsen sind. Auch wird die Bewegung in entsprechender Weise ein-

geführt. Wie man sieht, ist in diesem Falle die Gesamtheit der Bewegungen von $n(n+2)$ willkürlichen Gröfsen abhängig.

4. Indem Plücker neben dem Punkte auch die Ebene und die Gerade als Element in die Geometrie einführte, hat er ein Mittel geschaffen, welches zur Förderung der geometrischen Wissenschaft wesentlich beigetragen hat. Manche Partieen, welche vorher nur auf einem schwierigen und künstlichen Wege begründet werden konnten, lassen sich vermittelst der neuen Ideen sehr einfach und natürlich beweisen. Dazu sind ganz neue wichtige Partieen getreten, deren Behandlung bei dem früheren Standpunkte fast unmöglich sein dürfte. Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Grundlagen bleiben aber auch in Gültigkeit, wenn wir die Ebene oder die Gerade als Raumelement zu Grunde legen, und wir möchten hierin erst den vollen Abschlufs der durch Plücker geschaffenen Auffassung erblicken. Um dies zu begründen, können wir auf dem rein geometrischen Boden verbleiben; es sei aber gestattet, wie bei den besprochenen Beispielen den Nachweis durch die Analysis zu erbringen.

Für den Euklidischen Raum gehen wir von vier Variabeln u_0, u_1, u_2, u_3 aus, indem wir festsetzen, dafs jedesmal

$$(9) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

sein soll. Zwei Wertsysteme (u_0, u_1, u_2, u_3) und $(-u_0, -u_1, -u_2, -u_3)$, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, betrachten wir als identisch. Ein Raumteil wird wieder durch eine endliche stetige Mannigfaltigkeit der Wertsysteme (u) bestimmt. Für einen Körper benutzen wir die Veränderlichen v_0, v_1, v_2, v_3, indem wir zwischen den drei letzten die der Gleichung (9) entsprechende Beziehung bestehen lassen. Jetzt sagen wir wieder, ein Körper k decke einen Raumteil A, wenn jedem Wertsysteme (v) des Körpers k ein Wertsystem (u) von A durch die Gleichungen zugeordnet ist:

$$\begin{aligned}
u_0 &= v_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \\
u_1 &= a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3 \\
u_2 &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3 \\
u_3 &= a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3,
\end{aligned}$$

wo die Koefficienten b_1, b_2, b_3 ganz willkürlich sind und zwischen den Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ diejenigen Bedingungen bestehen, welche sich aus den Gleichungen (1) und (2) für $n = 3$ ergeben. Die

Bewegung wird wieder in derselben Weise eingeführt wie früher. Dadurch sind die Grundbegriffe auf die neue Anschauung übertragen; dafs aber auch die Grundsätze richtig bleiben, bedarf keiner Erwähnung. Die ersten Sätze der Geometrie selbst erleiden aber eine bedeutende Änderung. Wird der Raum so bewegt, dafs eine Ebene in sich verschoben wird, so bleiben auch alle zu ihr parallelen Ebenen in Deckung mit ihrer Anfangslage. Demnach können wir sagen: Betrachten wir im Euklidischen Raume die Ebene als Element, so bleiben bei der Ruhe eines Elementes auch die sämtlichen Elemente einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Ruhe; die Stelle des Abstandes zweier Punkte vertritt bei zwei parallelen Ebenen ihr Abstand, bei zwei sich schneidenden Ebenen ihr Winkel.

Wenn wir in der Riemannschen Raumform die Ebene als Element auffassen, so gelangen wir, wie wir bereits im ersten Bande (S. 69) bewiesen haben, zu einer Geometrie, die mit der Kleinschen identisch ist; aus diesem Grunde haben wir die letztere die Polarform des Riemannschen Raumes genannt. Sehen wir aber in einer Kleinschen Raumform die Ebene als Element an, so erhalten wir wieder eine Kleinsche Raumform.

5. Den Nachweis, dafs man die Gerade als Raumelement betrachten darf, ohne dafs unsere Grundbegriffe und Grundsätze ihre Gültigkeit verlieren, brauchen wir wohl nicht zu führen. Wir möchten nur auf die Verschiedenheit hinweisen, welche zwischen der gewöhnlichen Geometrie des Punktes und der der Geraden besteht. Zunächst bildet die Gesamtheit der Geraden des Raumes nicht mehr eine dreifach, sondern eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Ferner hat man zwischen zwei Elementen jetzt jedesmal zwei feste Beziehungen, den Abstand und den Winkel. Mit jedem Elemente ist eine (aus den parallelen Geraden bestehende) zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Elementen verbunden, deren Gesamtheit in sich verbleibt, wenn eines ihrer Elemente in Ruhe verbleibt (wenn eine ihrer Geraden in sich verschoben wird). Bei der Ruhe eines Elementes beschreibt jedes Element, das dem genannten Gebilde angehört, nur eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit; dagegen kann jedes andere Element in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bewegt werden. Sobald zwei Elemente in Ruhe gehalten werden,

die nicht beide demselben Gebilde der besonderen Art angehören, ist keine Bewegung möglich.

6. Aus den angeführten Beispielen, die noch bedeutend vermehrt werden können, läfst sich eine wichtige Folgerung ziehen. Gleichwie wir im ersten Abschnitt, von den Voraussetzungen Euklids ausgehend, zu verschiedenen Möglichkeiten gelangt sind, die unter einander gleiche Berechtigung haben, ebenso werden sich auch, wenn wir aus unseren Grundsätzen weitere Folgerungen herleiten, sehr viele einzelne Systeme ergeben, die sämtlich mit unserer Grundlage vereinbar sind, aber in ihrem weiteren Ausbau wesentlich von einander abweichen. Es liegt nahe, allen diesen Systemen einen gemeinsamen Namen beizulegen und jedes unter ihnen eine Raumform im allgemeinsten Sinne oder auch eine uneigentliche Raumform zu nennen. Ein gemeinsamer Name ist deshalb notwendig, weil alle diese Wissenszweige auf derselben Grundlage aufgebaut sind und in der Forschungsmethode übereinstimmen. Der Name selbst mufs aber von dem wichtigsten System hergenommen werden, das zu ihrer Gruppe gehört. Er ist aber auch berechtigt, weil die einzelnen Zweige fast ausnahmslos zur Theorie des Raumes in irgend einer Beziehung stehen: manche werden gewonnen, indem man die Kongruenz durch gewisse projektive Verwandtschaften ersetzt; bei anderen ist der Raum selbst das wahre Objekt der Untersuchung, nur wird statt des Punktes ein anderes Gebilde als Element zu Grunde gelegt; bei anderen erweitert man die Zahl der Dimensionen, betrachtet also Mannigfaltigkeiten, in denen gewisse Grenzgebilde ganz die Eigenschaften des Raumes haben. Diese Bemerkungen mögen vorläufig genügen; der folgende Abschnitt wird die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Raumformen noch mehr hervortreten lassen.

7. Die enge Beziehung, in welcher die Theorie des Raumes zu zahlreichen weiteren Zweigen des Wissens steht, drängt uns die Überzeugung auf, dafs eine strenge und natürliche Begründung von den angeführten Grundsätzen aus grofsen Schwierigkeiten unterliegen mufs. Wir müssen es uns deshalb versagen, hier näher auf die allgemeinen Raumformen einzugehen, um die Stellung zu erforschen, welche der Raum selbst unter den verwandten Wissenszweigen einnimmt. Es sei jedoch gestattet, die Definitionen

der Grenzgebilde in aller Kürze mitzuteilen; daraus wird hervorgehen, dafs an den Darlegungen des § 5 keine wesentliche Änderung angebracht zu werden braucht.

8. Zerlegen wir einen Raum A in zwei Teile B und C, so läfst sich jeder Körper k in gleichzeitige teilweise Deckung mit B und C bringen. Für unsern Zweck genügt es, anzunehmen, dafs jeder Teil von k in der geforderten Lage dem Raume A angehört. Sollte das nämlich nicht der Fall sein, so können wir erreichen, dafs ein Teil k' von k ganz im Raume A liegt und zugleich in teilweiser Deckung mit B und C ist; dann betrachte man statt des Körpers k den Körper k'. Mit diesem Körper nehme man weitere Zerlegungen vor. Eine solche könnte darin bestehen, dafs wir den dem Raume B angehörenden Teil von k als den einen und den dem Raume C angehörenden als den anderen Teil betrachten. Bei jeder anderen Teilung wird man mindestens einen Teil erhalten, welcher mit B und C zugleich in teilweiser Deckung liegt. Aus diesem Grunde sagen wir, der Körper k liege auf der Grenze von B und C. Ebenso sagen wir, zwei Räume B und C grenzten an einander oder hingen mit einander zusammen, wenn sie selbst keinen Teil gemeinschaftlich haben, es aber einen Raumteil A giebt, von dem jeder Teil entweder dem Raume B oder dem Raume C oder beiden angehört, mit anderen Worten, wenn es einen Raum A giebt, der in die beiden Teile B und C zerlegt werden kann.

Von B können wir solche Teile abtrennen, welche nicht mit C zusammenhangen; ebenso können wir von C solche Teile entfernt denken, die nicht an B grenzen. So sei B in die beiden Teile B' und B'' derartig zerlegt, dafs B'' nicht an C grenzt, und C bestehe aus den Teilen C' und C'', von denen der letztere keinen Zusammenhang mit B hat. Jeder Körper, der auf der Grenze von B und C liegt, ist auch mit B' und C' in gleichzeitiger teilweiser Deckung; die Grenze der Raumteile B und C ist also mit der Grenze der Raumteile B' und C' identisch.

Während aber die Raumteile B und C einen einzigen Raum bilden, ist es möglich, dafs bei der angegebenen Operation der von A übrig bleibende Teil in mehrere getrennte Raumteile zerfällt. Geschieht dies, so wird auch B' in mehrerere Teile B_1', B_2' ..., C' in die gleiche Anzahl Teile C_1', C_2' ... derartig

zerfallen, dafs jedesmal B_i' und C_i' die beiden Teile eines einzigen Raumes sind und es auch bleiben, wenn man von jedem unter ihnen Gebiete abtrennt, welche mit dem andern nicht in Zusammenhang stehen. Wir sagen jetzt, die Grenze (B_i', C_i') bestehe aus einem einzigen Grenzgebilde erster Ordnung. Die Grenze der Raumteile B und C besteht demnach aus einem einzigen Grenzgebilde, wenn

a) die Räume B und C keinen Teil gemeinschaftlich haben,

b) wenn sie einen einzigen Raum bilden, und

c) wenn auch immer ein einziger Raum übrig bleibt, indem man von jedem der beiden Räume solche Gebiete abtrennt, welche mit dem andern keinen Zusammenhang haben.

Dieselbe Teilung, welche hier für einen Raum durchgeführt ist, läfst sich auch mit einem Körper vornehmen; wir können daher die Definition der Grenzgebilde erster Ordnung auf Körper übertragen, dementsprechend auch ein solches Grenzgebilde bewegen und den Begriff der Kongruenz auch für Grenzgebilde gelten lassen.

9. Wenn durch die beiden Räume B und C ein einziges Grenzgebilde erster Ordnung (B, C) bestimmt wird, so sind mit unseren Voraussetzungen zwei einander ausschliefsende Möglichkeiten vereinbar: entweder wird jede Teilung von C nur einen einzigen Teil ergeben, welcher mit B in Zusammenhang steht, oder man kann C so in zwei Teile zerlegen, dafs jeder mit B einen zusammenhangenden Teil bildet. Im ersten Falle wird jeder Körper, welcher auf dem Grenzgebilde liegt, in teilweiser Deckung sein mit dem Raume, den irgend ein anderer Körper bei einer früheren derartigen Lage eingenommen hat. Demgemäfs fallen zwei Räume, die dem Grenzgebilde (B, C) angehören, jedesmal zum Teil zusammen; das Grenzgebilde kann also nicht mehr geteilt werden. Durch Vermittlung eines bewegten Körpers ergiebt sich, dafs jeder Raum, in den ein Körper gebracht werden kann, dieselbe Eigenschaft hat; der Raumform, der ein solcher Raum als Teil angehört, legen wir in diesem Falle eine einzige Dimension bei.

Läfst sich, indem man wieder unter (B, C) ein Grenzgebilde erster Ordnung versteht, B in zwei Teile D und E zerlegen, welche beide mit C zusammenhangen, so wird dadurch das Grenz-

gebilde (B, C) in die beiden Grenzgebilde (C, D) und (C, E) zerlegt. Um dementsprechend den Begriff der Teilung auf Grenzgebilde erster Ordnung zu übertragen, stellen wir folgende Definitionen auf: Ein Grenzgebilde ϱ ist ein Teil des Grenzgebildes π, wenn jeder Körper, der dem ersten angehört, auch auf dem zweiten liegt, während man einem Körper auch eine Lage geben kann, in der er auf dem Gebilde π, aber nicht auf dem Gebilde ϱ liegt; ein Grenzgebilde π ist in die zwei Teile ϱ und σ zerlegt, wenn jeder Körper, der auf π liegt, entweder dem Teile ϱ oder dem Teile σ oder den beiden Teilen ϱ und σ zugleich angehört, ohne dafs ϱ und σ selbst einen Teil gemeinschaftlich haben; zwei Grenzgebilde erster Ordnung grenzen an einander, wenn sie als die beiden Teile eines einzigen Grenzgebildes erster Ordnung betrachtet werden können. In diesem Falle sagen wir auch, sie hätten eine gegenseitige Grenze, und wir lassen einen Körper dieser Grenze angehören, wenn er nicht nur auf beiden Gebilden liegt, sondern auch jede Teilung desselben mindestens einen Teil liefert, der beiden Gebilden gleichzeitig angehört. Wiederum trennen wir von jedem der an einander grenzenden Gebilde solche Teile ab, welche mit dem andern keinen Zusammenhang haben; der übrig bleibende Teil wird dann entweder stets ein einziges Grenzgebilde erster Ordnung bilden oder in mehrere derartige Gebilde zerfallen. Im ersten Falle nennen wir ihre Grenze ein Grenzgebilde zweiter Ordnung.

10. Wird ein Grenzgebilde zweiter Ordnung (α, β) durch zwei mit einander zusammenhangende Grenzgebilde erster Ordnung α und β bestimmt, so wird entweder jede Teilung von α nur einen Teil ergeben, der mit β zusammenhängt, oder man kann α so zerlegen, dafs jeder Teil an β grenzt. Im ersten Falle müssen alle Räume, mit denen das Gebilde (α, β) in teilweiser Deckung ist, selbst in teilweiser Deckung sein; eine Teilung des Grenzgebildes (α, β) und damit, wie man leicht zeigt, eines jeden Grenzgebildes zweiter Ordnung ist nicht möglich; wir legen daher der Raumform, der das Gebilde angehört, zwei Dimensionen bei. Wenn aber verschiedene Körper gleichzeitig auf der gegenseitigen Grenze von α und β liegen können, so läfst sich das Gebilde (α, β) noch teilen. Wir können die früheren Definitionen wörtlich auf diese Gebilde übertragen und gelangen zu der Grenze

zweier Grenzgebilde zweiter Ordnung und damit zum Grenzgebilde dritter Ordnung.

In derselben Weise können wir aber unbegrenzt fortfahren. Dabei dürfen wir jedoch jedesmal nur Gebilde gleicher Ordnung zusammenstellen; nur von solchen Gebilden wollen wir sagen, dafs sie Teile eines einzigen Gebildes sind und dafs sie an einander grenzen. Wir sagen, eine Raumform habe n Dimensionen, wenn in ihr Grenzgebilde erster bis n^{ter} Ordnung, aber nicht solche von einer höhern Ordnung enthalten sind, wenn also das Grenzgebilde n^{ter} Ordnung unteilbar ist. In diesem Falle legen wir auch dem Grenzgebilde m^{ter} Ordnung $n - m$ Dimensionen bei.

11. Vielleicht wäre es angebracht, die vorstehenden Entwicklungen so umzugestalten, dafs von der Teilung der Grenzgebilde kein Gebrauch gemacht wird. Indessen tritt der Weg, auf dem sich dies Ziel erreichen läfst, in § 5 genugsam hervor. Wir möchten uns daher damit begnügen, noch in einer zweiten Weise anzugeben, was es heifst, der Raum habe n Dimensionen. Zu dem Ende treffen wir folgende Festsetzung:

»Wenn von $n + 1$ Raumteilen jeder mit jedem anderen zusammenhängt und dieser Zusammenhang bestehen bleibt, nachdem von jedem Teile solche Gebiete beliebig abgetrennt sind, welche mit einem anderen nicht zusammenhangen, so bezeichnet man die gröfste Zahl n, die in dieser Hinsicht möglich ist, als die Zahl der Dimensionen.«

Wir zerlegen also irgend einen Raumteil in zwei Teile und untersuchen, ob durch Abzweigung solcher Gebiete des einen, welche nicht mit dem anderen zusammenhangen, das Gebiet zerfällt; trifft dies ein, so betrachten wir nur ein Gebiet, bei dem dies nicht der Fall ist; den einen der beiden Teile zerlegen wir wieder so, dafs jeder der beiden neuen Teile mit dem anderen zusammenhängt, und sehen zu, ob eine Abtrennung solcher Gebiete, in denen kein Zusammenhang aller drei Teile statthat, zu einer Zerlegung führt; in derselben Weise fahren wir fort, bis eine weitere derartige Teilung unmöglich ist; wenn dies nach n Zerlegungen eintritt, so legen wir der Raumform n Dimensionen bei.

Um diese Definition als berechtigt nachzuweisen, müssen wir

zeigen, dafs es auf die Wahl des Raumteiles und die Art der Zerlegung nicht ankommt. Dafs wir dabei die Bewegung nicht entbehren können, darf uns nicht wundern; denn die Bewegung in dem vorhin beschriebenen Sinne ermöglicht es uns erst, verschiedene Raumteile mit einander zu vergleichen.

Die letzten Entwicklungen zeigen, dafs die Zahl der Dimensionen von unseren Voraussetzungen aus ganz willkürlich ist. Solange wir uns nur darauf beschränken, aus unseren Grundsätzen weitere Folgerungen zu ziehen, ist es nicht gestattet, eine Zahl vor der anderen zu bevorzugen. Dadurch sind auch die Untersuchungen des dritten Abschnitts zum vollen Abschlufs gelangt, indem wir erkennen, dafs die geometrischen Grundbegriffe und Grundsätze für jede Zahl von Dimensionen volle Gültigkeit besitzen.

Achter Abschnitt.

Anwendung der Transformations-Gruppen.

§ 1.

Überblick über die Theorie der Transformations-Gruppen.

Da es nicht möglich ist, die Theorie der Transformations-Gruppen, von der wir im folgenden eine wichtige Anwendung machen wollen, an dieser Stelle vollständig zu entwickeln, müssen wir für die Theorie selbst auf Lies Werk[23]) verweisen und uns hier mit einem Überblick begnügen. Dabei werden wir uns einerseits ganz auf diejenigen Lehrsätze beschränken, die im folgenden benutzt werden, andererseits aber gerade diese Sätze mit einer gewissen Ausführlichkeit behandeln. Von der Mitteilung der Beweise müssen wir jedoch abstehen; wenn wir in dieser Richtung zuweilen einige Andeutungen machen, so bezwecken wir damit nur, den Inhalt des Satzes selbst dem Leser näher zu bringen.

1. Wir gehen aus von n unbeschränkt veränderlichen Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$ und transformieren sie so, dafs jedem Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ ein Wertsystem $(x_1' \ldots x_n')$ entspricht. Dabei beschränken wir uns auf stetige Transformationen; demnach soll die Gesamtheit der Wertsysteme (x'), welche einer stetigen Mannigfaltigkeit von Wertsystemen (x) entsprechen, jedesmal eine stetige Mannigfaltigkeit bilden. Die neuen Variabeln $(x_1' \ldots x_n')$ sollen aber nicht blofs von den n Variabeln $x_1 \ldots x_n$, sondern auch von r willkürlichen Parametern $u_1 \ldots u_r$ abhangen; somit setzen wir die Gleichungen in der Form voraus:

$$
(1) \quad \begin{aligned}
x_1' &= f_1\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r) \\
x_2' &= f_2\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n' &= f_n\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen stellen für jedes Wertsystem der Parameter eine gewisse Transformation dar; ihre Gesamtheit bildet also ein System von Transformationen.

Nun sollen die Funktionen $f_1, f_2 \dots f_n$ nicht blofs in Bezug auf die Variabeln $x_1 \dots x_n$, sondern auch in Bezug auf die Parameter $u_1 \dots u_r$ stetig sein; die Transformationen (1) erleiden also stetige Veränderungen, wenn man die Parameter sich auf stetige Weise ändern läfst.

Die r Parameter $u_1 \dots u_r$ sind entweder wesentlich oder lassen sich auf eine geringere Zahl zurückführen. Im zweiten Falle kann man (für $p < r$) p Funktionen $t_1 \dots t_p$ von $u_1 \dots u_r$ so bestimmen, dafs die Gleichungen (1) nur von $t_1 \dots t_p$ abhangen. Im folgenden soll stets angenommen werden, dafs die Parameter auf ihre geringste Zahl zurückgeführt, dafs sie also wesentlich sind.

Mit der Transformation (1) für ein festes System von Parametern stellen wir die Transformation zusammen:

$$(2) \quad x_\varkappa'' = f_\varkappa(x_1' \dots x_n'; v_1 \dots v_r), \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$

wo auch den Parametern $v_1 \dots v_r$ feste Werte beigelegt sind. Indem wir in (2) für $x_1' \dots x_n'$ ihre aus (1) fliefsenden Werte einsetzen, machen wir die Variabeln $x_1'' \dots x_n''$ abhängig von den Variabeln $x_1 \dots x_n$ und den $2r$ Parametern $u_1 \dots u_r$, $v_1 \dots v_r$. Wir bevorzugen jetzt den Fall, dafs bei jeder Wahl von $u_1 \dots u_r$ und $v_1 \dots v_r$ die neuen Gleichungen die Form erhalten:

$$(3) \quad x_\varkappa'' = f_\varkappa(x_1 \dots x_n; w_1 \dots w_r),$$

wo die Gröfsen $w_1 \dots w_r$ von $x_1 \dots x_n$ unabhängig, also blofse Funktionen von $u_1 \dots u_r$, $v_1 \dots v_r$ sind. Dieser Fall ist deshalb von ganz hervorragender Wichtigkeit, weil alsdann die aus irgend zwei Transformationen des Systems zusammengesetzte Transformation wieder dem System angehört. Jedes System von Transformationen, welches dieser Bedingung genügt, welches also auch jedesmal die aus irgend zwei seiner Transformationen zusammengesetzte Transformation enthält, nennt Lie eine *Transformations-Gruppe*. Im vorliegenden Falle, wo die Zahl der Parameter endlich ist und dieselben eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, heifst die Gruppe eine *stetige endliche* Transformations-Gruppe. Ist die Zahl der wesentlichen Parameter, wie wir hier annehmen, gleich r, so wird die Gruppe als *r-gliedrig* bezeichnet.

2. Wir setzen voraus, daſs die Gruppe die identische Transformation enthält, d. h. daſs für ein gewisses System $a_1 \ldots a_r$ der Parameter die n Gleichungen erfüllt sind:

$$x_1 = f_1 (x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \ldots x_n = f_n (x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r).$$

(Daſs diese Forderung keine Beschränkung herbeiführt, hat zuerst Lie und später Schur bewiesen.) Dann kann man die Parameter $u_1 \ldots u_r$ durch r von einander unabhängige Funktionen dieser Gröſsen (z. B. durch $u_1 - a_1,\ u_2 - a_2 \ldots u_r - a_r$) derartig ersetzen, daſs die identische Transformation zu dem Parametersystem (0, 0 . . . 0) gehört. Diese Form soll im folgenden immer vorausgesetzt werden; es sollen also die Gleichungen bestehen:

$$(4)\quad x_1 = f_1 (x_1 \ldots x_n;\ 0 \ldots 0) \ldots x_n = f_n (x_1 \ldots x_n;\ 0, 0 \ldots 0).$$

Nun haben wir angenommen, daſs die Funktionen $f_\varkappa$ sowohl in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ wie in den Parametern $u_1 \ldots u_r$ stetig sind. Geben wir also den Parametern unendlich kleine Werte, so muſs auch jede Differenz $f_\varkappa - x_\varkappa$ unendlich klein sein. Mit anderen Worten: Wenn wir setzen:

$$u_1 = e_1 \delta t,\ u_2 = e_2 \delta t \ldots u_r = e_r \delta t,$$

wo δt eine unendlich kleine Gröſse sein soll, so wird unter Berücksichtigung der Gleichungen (4):

$$(5)\quad f_\varkappa (x_1 \ldots x_n;\ e_1 \delta t,\ e_2 \delta t \ldots e_r \delta t) = x_\varkappa + \delta t\,(e_1 \xi_{1\varkappa} + e_2 \xi_{2\varkappa} + \ldots e_r \xi_{r\varkappa}),$$

wo für $\varkappa = 1 \ldots n$, $\varrho = 1 \ldots r$ die $\xi_{\varrho\varkappa}$ Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind und zwar

$$(6)\quad \left[\frac{\partial f_\varkappa (x_1 \ldots x_n;\ u_1 \ldots u_r)}{\partial u_\varrho}\right]_{u_1 = \ldots = 0} = \xi_{\varrho\varkappa} (x_1 \ldots x_n).$$

Jede Transformation, die man aus (1) erhält, wenn man die Funktionen $f_1 \ldots f_n$ durch die rechten Seiten von (5) ersetzt, nennt Lie eine unendlich kleine oder eine infinitesimale Transformation.

Da die r Parameter $u_1 \ldots u_r$ von einander unabhängig sind, darf man auch den Konstanten $e_1 \ldots e_r$ ganz beliebige Werte beilegen. Speciell kann man jedesmal $r - 1$ unter ihnen gleich null und die r^{te} gleich eins setzen. Dadurch erhält man r infinitesimale Transformationen, von denen jede durch n Funktionen $\xi_{\varrho 1}, \xi_{\varrho 2} \ldots \xi_{\varrho n}$, die Komponenten der Transformation, bestimmt

wird. Jede Gruppe, in welcher die q unendlich kleinen Transformationen vorkommen:

$$(7)\quad \begin{matrix} \xi_{11}, & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21}, & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{q1}, & \xi_{q2} & \ldots & \xi_{qn}, \end{matrix}$$

enthält für beliebige konstante Gröfsen $e_1, e_2 \ldots e_q$ auch diejenige infinitesimale Transformation, deren Komponenten sind:

$$e_1\xi_{11} + e_2\xi_{21} + \ldots + e_q\xi_{q1},$$
$$e_1\xi_{12} + e_2\xi_{22} + \ldots + e_{q2} \ldots e_1\xi_{1n} + e_2\xi_{2n} + \ldots + e_q\xi_{qn}.$$

Dem entsprechend nennen wir die q infinitesimalen Transformationen (7) unabhängig von einander, wenn man für konstante Werte $e_1 \ldots e_q$ die n Gleichungen

$$\begin{aligned} e^1\xi_{11} + e_2\xi_{21} + \ldots + e_q\xi_{q1} &= 0 \\ e_1\xi_{12} + e_2\xi_{22} + \ldots + e_q\xi_{q2} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_1\xi_{1n} + e_2\xi_{2n} + \ldots + e_q\xi_{qn} &= 0 \end{aligned}$$

nur dadurch befriedigen kann, dafs man $e_1 = e_2 = \ldots = e_q = 0$ setzt. Jede r-gliedrige Gruppe enthält hiernach genau r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.

Umgekehrt führen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen auf ein r-gliedriges System (1). Gehen wir nämlich, entsprechend den Gleichungen (5), von den n Differentialgleichungen aus:

$$(8)\quad \frac{df_\varkappa}{dt} = e_1\xi_{1\varkappa} + e_2\xi_{2\varkappa} + \ldots + e_r\xi_{r\varkappa} \qquad (\varkappa = 1 \ldots n),$$

so müssen sich die Lösungen in der Form darstellen:

$$f_\varkappa = \varphi_\varkappa(x_1 \ldots x_n;\ e_1 \ldots e_r,\ t) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n),$$

indem die weiteren Integrations-Konstanten durch die Forderung (4) vollständig bestimmt werden. Nun ändert sich das Gleichungssystem (8) nicht, wenn man t durch eine beliebige Konstante c dividiert, aber zugleich alle Gröfsen $e_1, e_2 \ldots e_r$ mit demselben c multipliziert. Demnach können auch die Lösungen aufser von den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ nur von den r Produkten $e_1t, e_2t \ldots e_rt$ abhangen; sie nehmen also für $e_1t = u_1$, $e_2t = u_2 \ldots e_rt = u_r$ die Gestalt (1) an.

3. Wenn durch eine unendlich kleine Transformation jede einzelne Variabele $x_\varkappa$ die Veränderung $\xi_\varkappa\,\delta t$ erleidet, wenn also

$\xi_1 \ldots \xi_n$ die Komponenten der unendlich kleinen Transformation sind, so wird eine beliebige Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$ um $\delta t \sum_{\varkappa} \xi_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa}}$ verändert. Demnach bezeichnet Lie eine infinitesimale Transformation symbolisch durch

$$(9) \quad X(f) = \sum_{\varkappa} \xi_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa}},$$

wo statt $X(f)$ vielfach Xf oder, wo kein Mifsverständnis befürchtet werden kann, auch kurz X geschrieben wird. Ein Vorzug dieser Bezeichnung besteht in der Leichtigkeit, mit der neue Variabele eingeführt werden. Ersetzt man nämlich die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ durch die Variabeln $y_1 \ldots y_n$, wo $y_{\varkappa} = \varphi_{\varkappa}(x)$ ist, so ist:

$$X(f) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\alpha,\beta} \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_{\beta}} \cdot \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\beta} X(y_{\beta}) \frac{\partial f}{\partial y_{\beta}} = Y(f).$$

Ihre gröfste Bedeutung erlangt diese Bezeichnung aber dadurch, dafs sie erlaubt, schwierige Operationen mit einem Blick zu übersehen.

Wir wollen davon sofort ein Beispiel geben. Für

$$X(f) = \sum \xi_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa}} \text{ wird } X(\xi_{\alpha}) = \sum_{\varkappa} \xi_{\varkappa} \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x_{\varkappa}},$$

$$X(X[\xi_{\alpha}]) = \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\xi_{\varkappa} \xi_{\lambda} \frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial x_{\varkappa} \partial x_{\lambda}} + \xi_{\alpha} \frac{\partial x_{\lambda}}{\partial x_{\varkappa}} \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x_{\lambda}} \right) \text{ u. s. w.}$$

Jetzt stellen für $\alpha = 1 \ldots n$ die n Gleichungen:

$$(10) \quad x_{\alpha}' = x_{\alpha} + \frac{t}{1} \xi_{\alpha} + \frac{t^2}{2!} X(\xi_{\alpha}) + \frac{t^3}{3!} X(X[\xi_{\alpha}]) + \ldots$$

entsprechend den Gleichungen (1) ein System von Transformationen mit dem Parameter t dar. Verbindet man mit einer hieraus hervorgehenden Transformation die weitere:

$$x_{\alpha}'' = x_{\alpha}' + \frac{t'}{1} \xi_{\alpha}' + \frac{t'^2}{2!} X(\xi_{\alpha}') + \ldots,$$

wo $\xi_{\alpha}' = \xi_{\alpha}(x_1' \ldots x_n')$ sein soll, so gelangt man durch Zusammensetzung dieser beiden Transformationen zu der neuen Transformation:

$$x_{\alpha}'' = x_{\alpha} + \frac{t + t'}{1} \xi_{\alpha} + \frac{(t + t')^2}{2!} X(\xi_{\alpha}) + \ldots$$

Die Transformationen (10) bilden also eine eingliedrige Gruppe; wir sagen mit Lie, zu dieser eingliedrigen Gruppe gehöre die infinitesimale Transformation X(f) und umgekehrt werde durch X(f) die eingliedrige Gruppe (10) erzeugt.

4. Das Zeichen $X_\alpha(X_\beta f)$ bedeutet, dafs in der rechten Seite von (9) an die Stelle von f gesetzt wird $\sum_\varkappa \xi_{\beta\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$; demnach ist:

$$X_\alpha(X_\beta f) = \sum_{\iota,\varkappa} \xi_{\alpha\iota} \frac{\partial \xi_{\beta\varkappa}}{\partial x_\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\iota,\varkappa} \xi_{\alpha\iota} \xi_{\beta\varkappa} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\iota \, \partial x_\varkappa}.$$

Da hier die zweiten Ableitungen von f für $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ gleichmäfsig vorkommen, so heben sie sich weg, wenn man noch $X_\beta(X_\alpha f)$ bildet und von dem vorigen Ausdruck abzieht. Demnach stellt:

$$(11) \quad (X_\alpha X_\beta) = X_\alpha(X_\beta f) - X_\beta(X_\alpha f)$$
$$= \sum_{\iota,\varkappa} \left(\xi_{\alpha\iota} \frac{\partial \xi_{\beta\varkappa}}{\partial x_\iota} - \xi_{\beta\iota} \frac{\partial \xi_{\alpha\varkappa}}{\partial x_\iota} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$$

ebenfalls eine unendlich kleine Transformation dar, von der wir sagen, sie werde durch Kombination der Transformationen $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ erhalten. Damit dieser Ausdruck gestattet ist, mufs das Ergebnis der Operation $(X_\alpha X_\beta)$ von der Wahl der Variabeln unabhängig sein; mit anderen Worten: wenn für die neuen Variabeln $y_1 \ldots y_n$ die Formen $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ in $Y_\alpha f$ und $Y_\beta f$ übergehen, so mufs auch die Form $(X_\alpha X_\beta)$ in $(Y_\alpha Y_\beta)$ verwandelt werden. Das nachzuweisen ist sehr leicht.

Nun sagt einer der wichtigsten Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen, dafs in jeder Gruppe, welche zwei unendlich-kleine Transformationen enthält, auch die durch ihre Kombination erhaltene Transformation vorkommt. Wir haben aber erkannt, dafs jede unendlich kleine Transformation der durch die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$ bestimmten Gruppe in der Form $\sum e_\varrho X_\varrho f$ dargestellt werden kann. Somit mufs für jede Kombination α, β der Marken $1 \ldots r$ ein System von r Konstanten $c_{\alpha\beta 1} \ldots c_{\alpha\beta r}$ bestehen, so dafs die Gleichung gilt:

$$(12) \quad (X_\alpha X_\beta) = \sum_\varrho c_{\alpha\beta\varrho} X_\varrho f.$$

Umgekehrt beweist man, dafs diese Bedingungen auch hinreichend sind, wenn die infinitesimalen $X_1 f \ldots X_r f$ eine Gruppe bestimmen sollen; mit anderen Worten: Wenn die $r n$ Funktionen $\xi_{\varrho \varkappa}$ so gewählt sind, dafs unter Zugrundelegung der Gleichungen (9) und (11) die $\frac{r(r-1)}{2}$ Gleichungen (12) für ein gewisses System von Konstanten $c_{\iota \varkappa \varrho}$ erfüllt sind, so erzeugen die r infinitesimalen Transformationen $X_\alpha f = \sum_\iota \xi_{\alpha \iota} \frac{\partial f}{\partial x_\iota}$ für $\alpha = 1 \ldots r$ eine r-gliedrige Transformations-Gruppe.

Wenn in der Gleichung (12) die r Koefficienten $c_{\alpha \beta 1} \ldots c_{\alpha \beta r}$ sämtlich gleich null sind, so ist jede von $X_\alpha f$ erzeugte Transformation mit jeder aus $X_\beta f$ hervorgehenden vertauschbar. Führen wir nämlich entsprechend den Gleichungen (10) die Transformation aus: $x_\varkappa' = x_\varkappa + t \xi_{\alpha \varkappa} + \ldots$, und verbindet damit die Transformation: $x_\varkappa'' = x_\varkappa' + u \xi_{\beta \varkappa}' + \ldots$, so gelangt man bei Vertauschung der Reihenfolge zu demselben Resultate; d. h. wenn man setzt:

$$\overline{x_\varkappa} = x_\varkappa + u \xi_{\beta \varkappa} + \ldots, \text{ so wird } x_\varkappa'' = \overline{x_\varkappa} + t \overline{\xi_{\alpha \varkappa}} + \ldots,$$

wo ist $\xi_{\beta' \varkappa} = \xi_{\beta \varkappa}(x_1' \ldots x_n')$, $\overline{\xi_{\alpha \varkappa}} = \xi_{\alpha \varkappa}(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})$.

5. Die Konstanten $c_{\alpha \beta \varrho}$ sind nicht willkürlich. Zunächst ist offenbar:

$$c_{\alpha \beta \varrho} + c_{\beta \alpha \varrho} = 0.$$

Die Definition (11) zeigt aber auch, dafs die Gleichung besteht:

$$(X_\alpha [X_\beta X_\gamma]) + (X_\beta [X_\gamma X_\alpha]) + (X_\gamma [X_\alpha X_\beta]) = 0.$$

Demnach mufs infolge von (12) die Gleichung erfüllt sein:

$$(13) \quad \sum_\varrho \{ c_{\beta \gamma \varrho} (X_\varrho X_\alpha) + c_{\gamma \alpha \varrho} (X_\varrho X_\beta) + c_{\alpha \beta \varrho} (X_\varrho X_\gamma) \} = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung, welche sehr häufig benutzt wird, kurz die Relation $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ nennen. Setzen wir hierin für $(X_\varrho X_\alpha) \ldots$ die Werte aus (12) ein, so folgt:

$$(14) \quad \sum_\varrho \{ c_{\beta \gamma \varrho} c_{\varrho \alpha \varepsilon} + c_{\gamma \alpha \varrho} c_{\varrho \beta \varepsilon} + c_{\alpha \beta \varrho} c_{\varrho \gamma \varepsilon} \} = 0$$

für irgend vier Marken α, β, γ, ε.

Hiermit sind alle Bedingungen erschöpft, denen die Koefficienten $c_{\alpha \beta \varrho}$ genügen müssen, und Lie hat nachgewiesen, dafs

zu jedem derartigen System von Koefficienten auch wirklich eine Gruppe gehört.

6. Gehen die n Funktionen $f_\varkappa$ $(x_1 \ldots x_n;\ u_1 \ldots u_r)$ dadurch, dafs ich die Parameter $u_1 \ldots u_r$ von $p < r$ Gröfsen $v_1 \ldots v_p$ abhängig mache, in die n Funktionen $g_\varkappa$ $(x_1 \ldots x_n;\ v_1 \ldots v_p)$ über und bildet das durch diese Gleichungen bestimmte System eine Gruppe, so gehört offenbar jede Transformation der letzten Gruppe auch der ursprünglichen Gruppe an; die neue Gruppe heifst demnach eine Untergruppe der ersten.

Man kann auch von den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe aus zu ihren Untergruppen gelangen. Zu dem Ende setze man für $p < r$:

$$Y_1 f = k_{11} X_1 f + \ldots + k_{1r} X_r f$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_p f = k_{p1} X_1 f + \ldots + k_{pr} X_r f,$$

und bestimme die pr Konstanten $k_{11} \ldots k_{pr}$ so, dafs für jede Kombination α, β der Marken $1 \ldots p$ die Gleichung

$$(Y_\alpha Y_\beta) = e_{\alpha\beta 1} Y_1 f + \ldots + e_{\alpha\beta r} X_r f$$

für konstante Werte von $e_{\alpha\beta 1} \ldots e_{\alpha\beta r}$ erfüllt wird. Dann erzeugen offenbar die p infinitesimalen Transformationen $Y_1 \ldots Y_p$ eine Gruppe, deren sämtliche Transformationen in der aus $X_1 \ldots X_r$ hervorgehenden Gruppe enthalten sind; die neue Gruppe ist also eine Untergruppe der gegebenen.

Dafs jede Gruppe eingliedrige Untergruppen besitzt, haben wir bereits oben gesehen. In der That ist diejenige Gruppe, welche bei beliebigen konstanten Werten von $e_1 \ldots e_r$ von der infinitesimalen Transformation $e_1 X_1 f + \ldots + e_r X_r f$ erzeugt wird, eine eingliedrige Untergruppe der aus $X_1 f \ldots X_r f$ hervorgehenden Gruppe.

Sobald man komplexe Transformationen zuläfst, hat jede Gruppe auch zweigliedrige Untergruppen. Davon überzeugt man sich durch folgende Überlegung. Bestimmen Yf und Zf eine zweigliedrige Gruppe, so mufs sein $(YZ) = m Yf + n Zf$ für konstante Werte von m und n. Wenn hier n nicht verschwindet, so setze man $mY + nZ = U$ und bestimme die Gruppe durch die beiden Transformationen Y und U. Dann mufs die Gleichung gelten: $(YU) = \omega U$. Hierin ist auch der Fall eingeschlossen,

dafs m und n verschwinden, dafs also alle Transformationen der zweigliedrigen Gruppe mit einander vertauschbar sind.

Jetzt gehen wir von einer beliebigen infinitesimalen Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ der gegebenen Gruppe aus; soll sie einer zweigliedrigen Untergruppe angehören, so mufs es möglich sein, eine zweite Transformation $\Sigma \zeta_\iota X_\iota f$ derartig zu bestimmen, dafs ist:

$$(\Sigma \eta_\iota X_\iota, \Sigma \zeta_\iota X_\iota) = \omega \Sigma \zeta_\iota X_\iota f.$$

Da nun offenbar die linke Seite gleich $\Sigma \eta_\iota \zeta_\varkappa (X_\iota X_\varkappa)$ ist, so führt die voranstehende Gleichung auf die r Relationen:

$$(15) \quad \sum_{\iota,\varkappa} \eta_\iota \zeta_\varkappa c_{\iota\varkappa\alpha} = \omega \zeta_\alpha.$$

Demnach wird ω als Wurzel einer Gleichung rten Grades bestimmt, deren Koefficienten von den Konstanten $c_{\alpha\beta\gamma}$ und von den Gröfsen $\eta_1 \ldots \eta_r$ abhangen. Da jedenfalls eine Wurzel dieser Gleichung gestattet, die Koefficienten $\zeta_1 \ldots \zeta_r$ unseren Forderungen entsprechend zu bestimmen, so gelangen wir mindestens zu einer zweigliedrigen Untergruppe, der die infinitesimale Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ angehört.

Die angegebene Gleichung gestattet aber auch, die mehrgliedrigen Untergruppen zu bestimmen, in denen eine gegebene Transformation vorkommt. Dabei kommt es, wie die Gleichungen (15) zeigen, nicht auf die Gruppe selbst, sondern nur auf die Koefficienten $c_{\alpha\beta\gamma}$ an. Demnach ist es gestattet, zwei Gruppen, in denen dieselben Koefficienten c zu Grunde gelegt werden können, gleichen Bau oder gleiche Struktur beizulegen. (Der früher von Lie eingeführte und auch von mir gebrauchte Ausdruck, sie hätten gleiche Zusammensetzung, wird am besten ganz vermieden.)

7. Wenden wir die sämtlichen Transformationen einer Gruppe auf ein Wertsystem $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ an, so bildet die Gesamtheit der Wertsysteme, in welche dasselbe übergeführt wird, entweder eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit oder eine Mannigfaltigkeit von weniger Dimensionen. Wenn das letztere für alle Wertsysteme gilt, so nennen wir die Gruppe intransitiv. Sobald wir nur von einem einzigen Wertsystem wissen, dafs es in alle Wertsysteme seiner Umgebung übergeführt werden kann, mufs dasselbe für alle Wertsysteme möglich sein, die nicht besonderen

Bedingungen genügen; in diesem Falle nennen wir die Gruppe transitiv.

Gehen wir z. B. von den r infinitesimalen Transformationen aus:

$$F_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \; \ldots \; F_r(x)\frac{\partial f}{\partial y},$$

wo $F_1(x), \ldots F_r(x)$ ganz beliebige Funktionen von x sind, so erkennen wir sofort, dafs sie eine Gruppe bestimmen. Die endlichen Transformationen sind offenbar:

$$x' = x, \quad y' = y + u_1 F_1(x) + u_2 F_2(x) + \ldots + u_r F_r(x);$$

es bleibt also der Wert von x ungeändert. Betrachten wir x und y als die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten, so werden alle zur y-Achse parallelen Geraden in sich verschoben.

Dagegen wird bei gleicher Auffassung der Werte x und y durch die Transformationen der viergliedrigen Gruppe:

$$y\frac{\partial f}{\partial y}, \; \frac{\partial f}{\partial x}, \; x\frac{\partial f}{\partial x}, \; x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}$$

zwar jeder Punkt der Linie $y = 0$ in dieser Linie belassen; aber jeder andere Punkt der Ebene kann in alle Punkte übergeführt werden, welche mit ihm auf derselben Seite der x-Achse liegen; die Gruppe ist also transitiv.

Sind die Komponenten der r infinitesimalen Transformationen, durch welche eine transitive Gruppe bestimmt wird,

$$\begin{array}{ccc} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rn}, \end{array}$$

so mufs zunächst $r \geqq n$ sein; zugleich mufs unter den $\binom{r}{n}$ Determinanten, welche man aus der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{r1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{rn} \end{array} \right\|$$

durch Auswahl von n Vertikalreihen bilden kann, mindestens eine sein, welche nicht identisch verschwindet.

§ 2.

Beispiele von Transformations-Gruppen.

1. Die Bewegungen des euklidischen Raumes von n Dimensionen.

Wir wollen im folgenden immer das Symbol $\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ durch $p_\varkappa$ ersetzen. Bei Benutzung der n Variabeln $x_1 \dots x_n$ gehen wir von den $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen aus:

$$(1) \quad p_\iota, \; p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota = U_{\iota\varkappa}.$$

Dafs diese eine Gruppe bestimmen, erkennt man sehr leicht, indem man je zwei von ihnen kombiniert. Sind nämlich ι, $\varkappa$, λ, μ vier ungleiche Marken aus der Reihe $1 \dots n$, so ist offenbar unter Anwendung der durch die Gleichung (11) des vorigen Paragraphen gegebenen Vorschrift:

$$(2) \quad (p_\iota, p_\varkappa) = 0, \; (p_\iota, U_{\iota\varkappa}) = -p_\varkappa, \; (p_\iota, U_{\varkappa\lambda}) = 0,$$
$$(U_{\iota\varkappa}, U_{\iota\lambda}) = U_{\varkappa\lambda}, \; (U_{\iota\varkappa}, U_{\lambda\mu}) = 0.$$

Zugleich sehen wir, dafs sowohl die n Transformationen p_ι, wie die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transformationen $U_{\iota\varkappa}$ für sich eine Untergruppe bestimmen. Die letztere ist intransitiv, da sie die Form $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ungeändert läfst. Die infinitesimale Transformation $U_{\iota\varkappa}$ führt nämlich Φ über in

$$\Phi + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\iota} x_\varkappa - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\varkappa} x_\iota\right) \delta t,$$

wo der Klammerausdruck verschwindet. Aus dieser Eigenschaft der Gruppe kann man bereits schliefsen, dafs die endlichen Transformationen der Gruppe sind:

$$y_\varkappa = a_{\varkappa 1} x_1 + a_{\varkappa 2} x_2 + \dots + a_{\varkappa n} x_n + b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1 \dots n),$$

wofern zwischen den n^2 Koefficienten $a_{\alpha\beta}$ die Beziehungen bestehen:

$$a_{\varkappa 1}^2 + a_{\varkappa 2}^2 + \dots + a_{\varkappa n}^2 = 1$$
$$(4) \quad a_{\varkappa 1} a_{\lambda 1} + a_{\varkappa 2} a_{\lambda 2} + \dots + a_{\varkappa n} a_{\lambda n} = 0 \qquad \text{für } \varkappa \lessgtr \lambda,$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Wir wollen dies noch in anderer Weise zeigen. Angenommen, irgend eine Auswahl aus den Transformationen (1) habe zu einer durch die Gleichungen (3) und (4) charakterisierten Transformation geführt; dann zeigen wir, dafs die Hinzunahme irgend einer anderen Transformation (1) wieder eine Lösung derselben Form liefert. Die infinitesimale Transformation p_ι vertritt die Differentialgleichungen:

$$dx_1 = \ldots = dx_{\iota-1} = dx_{\iota+1} = \ldots = dx_n = 0,\ dx_\iota = dt;$$

ihre Anwendung auf die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ führt zu der Transformation:

$$z_1 = y_1 \ldots z_{\iota-1} = y_{\iota-1},\ z_\iota = y_\iota + t,\ z_{\iota+1} = y_{\iota+1} \ldots,\ z_n = y_n.$$

In den Gleichungen (3) ändert sich also nur der Koefficient b_ι, der in $b_\iota + t$ übergeht, während alle anderen ungeändert bleiben.

In entsprechender Weise vertritt das Symbol $p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota$ die n Differentialgleichungen:

$$dx_\iota = x_\varkappa du,\ dx_\varkappa = - x_\iota du,\ dx_\lambda = 0 \text{ für } \lambda \gtrless \iota,\ \varkappa.$$

Indem wir diese auf die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ anwenden, erhalten wir die Transformationen:

$$z_\iota = y_\iota \cos u + y_\varkappa \sin u,\ z_\varkappa = - y_\iota \sin u + y_\varkappa \cos u,\ z_\lambda = y_\lambda.$$

Für $y_1 \ldots y_n$ führen wir die in den Gleichungen (3) angegebenen Werte ein und erhalten:

$$z_\alpha = a'_{\alpha 1} x_1 + \ldots + a'_{\alpha n} x_n + b'_\alpha \qquad (\alpha = 1 \ldots n) \text{ für}$$

$$a'_{\iota\nu} = a_{\iota\nu} \cos u + a_{\varkappa\nu} \sin u,\ a'_{\varkappa\nu} = - a_{\iota\nu} \sin u + a_{\varkappa\nu} \cos u,\ a'_{\lambda\nu} = a_{\lambda\nu},$$

$$b'_\iota = b_\iota + b_\iota \cos u + b_\varkappa \sin u,\ b'_\varkappa = b_\varkappa - b_\iota \sin u + b_\varkappa \cos u,\ b'_\lambda = b_\lambda.$$

Wir gelangen also wieder zu einer Transformation von der Form (3), und für die neuen Koefficienten gelten offenbar wieder die beiden ersten Gleichungen (4). Dafs aber auch die aus den neuen Koefficienten gebildete Determinante ungeändert bleibt, braucht man nicht einmal aus dem Multiplikations-Theorem herzuleiten; es genügt, wenn man in der neuen Determinante die Elemente der $\varkappa^{\text{ten}}$ Reihe mit tgu multipliziert und von denen der ι^{ten} Reihe subtrahiert.

Nun genügt die identische Transformation $y_\varkappa = x_\varkappa$ offenbar den Bedingungen (3) und (9); somit darf man die aus den

infinitesimalen Transformationen (1) hervorgehenden endlichen Transformationen in beliebiger Reihenfolge und beliebig oft mit einander verbinden und erhält stets eine Transformation von der durch die Gleichungen (3) und (4) angegebenen Form.

Die Zahl der willkürlichen Parameter beträgt aber

$$n + n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

und da dies auch die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen ist, so erkennen wir, dafs durch die Transformationen (1) wirklich die angegebene Gruppe erzeugt wird.

Man kann auch die Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ in der von Cayley gefundenen Weise, die man u. a. in Baltzers Theorie der Determinanten findet, vermittelst $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander unabhängigen Gröfsen darstellen und erkennt wiederum, dafs die Zahl der Parameter gleich $n + \frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Von den Gleichungen (3) und (4) sind wir ausgegangen, als wir im ersten Bande (S. 205–210) die Bewegungen des n-dimensionalen euklidischen Raumes untersucht haben; wir sehen jetzt, dafs diese Bewegungen durch diejenige Transformations-Gruppe dargestellt werden, welche durch die infinitesimalen Transformationen (1) erzeugt wird.

2. Die Bewegungen der nicht-euklidischen Raumformen von n Dimensionen.

Für die $n+1$ Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$ legen wir die $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen zu Grunde:

$$(5) \quad V_\varkappa = k^2 x_0 p_\varkappa - x_\varkappa p_0, \quad U_{\iota\varkappa} = p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota.$$

Diese bestimmen eine Gruppe, wie man aus den Gleichungen erkennt:

$$(V_\iota, V_\varkappa) = k^2 U_{\iota\varkappa}, \quad (V_\iota, U_{\iota\varkappa}) = - V_\varkappa, \quad (V_\iota, U_{\varkappa\lambda}) = 0,$$

$$(U_{\iota\varkappa}, U_{\iota\lambda}) = U_{\varkappa\lambda}, \quad (U_{\iota\varkappa}, U_{\lambda\mu}) = 0,$$

wo $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$ vier verschiedene Marken der Reihe $1, 2 \ldots n$ sind.

Die auf diese Weise erhaltene Gruppe ist intransitiv, da die quadratische Form

$$k^2x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

von allen infinitesimalen Transformationen (5) und infolge dessen auch von den endlichen Transformationen der Gruppe nicht geändert wird. Beschränken wir uns aber etwa auf die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit:

$$(6) \quad k^2x_0^2 + x_1^2 + \ldots, + x_n^2 = k^2,$$

so ist für diese die Gruppe transitiv. Um das zu erkennen, stellen wir folgende Erwägung an. Wir betrachten einen gewissen Bereich der Mannigfaltigkeit (6), der in der Umgebung des Wertsystems (0, 0 . . . 0) liegt; zur Bestimmung aller Wertsysteme dieses Bereiches genügen die n Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$. Um die Veränderungen zu übersehen, welche diese Gröfsen erleiden, benutzen wir die Gröfse x_0, welche wir durch die Gleichung

$$\sqrt{\frac{k^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}{k^2}}$$

und die Festsetzung definieren, dafs für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ zugleich $x_0 = 1$ sein soll. Hiernach lege man den Umgestaltungen des Gebildes (6) die $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen zu Grunde:

$$p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota, \quad x_0 p_\varkappa.$$

Die letzten n Transformationen für sich führen bereits das Wertsystem (0, 0 . . . 0) in jeden Punkt der Umgebung über; die Gruppe ist also transitiv.

Für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist die Gröfse x_0 blofse Hilfsgröfse, deren Benutzung nur den Zweck hat, die Formeln einfach und übersichtlich zu machen. Da das Gebilde (6) des (n + 1)-dimensionalen Raumes bei der aus (5) hervorgehenden Gruppe in sich verbleibt, so dürfen wir auch auf die Untersuchung des Gebildes (6) diejenigen endlichen Gleichungen anwenden, welche durch die infinitesimalen Transformationen (5) erzeugt werden. Diese Gleichungen sind aber, wie wir auf dem in der vorigen Nummer entwickelten Wege erkennen, homogen linear, und zwischen den Koefficienten bestehen die Bedingungs-Gleichungen, welche wir im ersten Bande (S. 205 u. 206) angegeben

haben. Die aus (6) hervorgehende Gruppe stellt demnach die Bewegungen eines n-dimensionalen nicht-euklidischen Raumes dar, für den das Riemannsche Krümmungsmafs gleich $\frac{1}{k^2}$ ist.

Für manche Zwecke eignen sich folgende Variabele besser:

$$(7) \quad y_1 = \frac{x_1}{x_0},\ y_2 = \frac{x_2}{x_0} \ \ldots\ y_n = \frac{x_n}{x_0}.$$

Die Forderung (6) verlangt jetzt, dafs das quadratische Gebilde

$$k^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 0$$

durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert wird. Wendet man die durch die Gleichung (q) des vorigen Paragraphen gegebene Vorschrift auf die Transformation $p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota$ an, so erhalten wir für $\frac{\partial f}{\partial f_\varkappa} = q_\varkappa$ das Symbol $q_\iota y_\varkappa - q_\varkappa y_\iota$; ebenso geht das Symbol $x_0 p_\varkappa$ über in $q_\varkappa + \frac{y_\varkappa}{k^2} \sum_\varrho y_\varrho q_\varrho$. In den Variabeln $y_1 \ldots y_n$ wird also die Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen erzeugt:

$$(8) \quad q_\varkappa + \frac{y_\varkappa}{k^2} \sum_\varrho y_\varrho q_\varrho,\quad q_\iota y_\varkappa - q_\varkappa y_\iota,$$

wo die Marken ι, $\varkappa$ der Reihe $1, 2 \ldots n$ angehören. Für $k^2 = \infty$ geht die Gruppe (8) auch ihrer äufsern Form nach in die Gruppe (1) der vorigen Nummer über.

3. Die allgemeine projektive Gruppe.

Wir machen, entsprechend den in III § 7 (B. 1. S. 182) getroffenen Festsetzungen, die Transformationen der n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ abhängig von den $n(n+2)$ Verhältnissen der $(n+1)^2$ Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n$ vermittelst der Gleichungen:

$$(9) \quad y_\alpha = \frac{a_{\alpha o} + \sum a_{\alpha\nu} x_\nu}{a_{oo} + \sum a_{o\nu} x_\nu} \qquad (\alpha, \nu = 1, 2 \ldots n).$$

Setzen wir

$$z_\alpha = \frac{b_{\alpha o} + \sum b_{\alpha\nu} y_\nu}{b_{oo} + \sum b_{o\nu} y_\nu},$$

so folgt: $z_\alpha = \frac{c_{\alpha o} + \sum c_{\alpha\nu} x_\nu}{c_{oo} + \sum c_{o\nu} x_\nu}$, wofern gesetzt wird:

$$c_{\mu\nu} = \sum_{\tau=o}^{n} b_{\mu\tau} a_{\tau\nu}.$$

Die Transformationen (9) gehören also einer n (n — 2)-gliedrigen Gruppe an.

Soll sich die Transformation (9) von der identischen Transformation $y_\alpha = x_\alpha$ unendlich wenig unterscheiden, so darf a_{oo} nicht verschwinden, kann also gleich eins gesetzt werden; zugleich mufs sein:

$$a_{\alpha\alpha} = 1 + c_{\alpha\alpha}\delta t,\ a_{\alpha o} = c_{\alpha o}\delta t,\ a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\delta t,\ a_{o\alpha} = -c_{o\alpha}\delta t$$

für $\alpha \gtrless \beta$ und einen unendlich kleinen Wert von δt. Alsdann wird für $y_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha$:

$$\frac{\delta x_\alpha}{\delta t} = c_{\alpha 0} + c_{\alpha 1}x_1 + \ldots c_{\alpha n}x_n + x_\alpha (c_{01}x_1 + \ldots + c_{0n}x_n).$$

Da die n (n + 2) Gröfsen c noch willkürlich gewählt werden können, gelangen wir zu den infinitesimalen Transformationen:

$$(10)\quad p_\iota,\ p_\iota x_\varkappa = V_{\iota\varkappa},\ x_\iota (x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n) = W_\iota,$$

wo $\iota, \varkappa = 1 \ldots n$ zu nehmen sind und auch $\iota = \varkappa$ gesetzt werden kann. Indem wir das bekannte Zeichen $\delta_{\iota\varkappa}$ benutzen, welches = 1 oder = 0 ist, jenachdem die Marken ι, $\varkappa$ gleich oder verschieden sind, können wir die Resultate aus der Kombination je zweier unendlich kleiner Transformationen leicht in folgender Weise angeben:

$$(p_\varkappa p_\lambda) = 0,\ (W_\varkappa W_\lambda) = 0,\ (p_\varkappa V_{\lambda\mu}) = \delta_{\varkappa\lambda} p_\mu,$$
$$(p_\varkappa, W_\lambda) = V_{\varkappa\lambda} + \delta_{\varkappa\lambda}(V_{11} + V_{22} + \ldots + V_{nn}),$$
$$(V_{\varkappa\lambda}, V_{\mu\nu}) = \delta_{\varkappa\nu}V_{\mu\lambda} - \delta_{\lambda\mu}V_{\varkappa\nu},\ (V_{\varkappa\lambda}, W_\mu) = \delta_{\varkappa\mu}W_\lambda.$$

Führt man die neuen Variabeln $y_0, y_1 \ldots y_n$ ein durch die Forderung:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0}, \ldots x_n = \frac{y_n}{y_0},\ y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1,$$

so kann man setzen:

$$\frac{\delta y_\iota}{\delta t} = \sum_\varrho c_{\iota\varrho} y_\varrho - y_\iota \sum_{\varrho\sigma} c_{\varrho 0} y_\varrho y_\sigma \qquad (\iota, \varrho, \sigma = 0, 1 \ldots n).$$

Läfst man hierin die sämtlichen Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$, deren Marken ungleich sind, verschwinden und setzt die übrigen einander gleich, so wird jedes dy_ι gleich null; also hangen auch die neuen Transformationen von n (n + 2) Parametern ab.

4. Die Bewegungen der in einem dreidimensionalen euklidischen Raume gelegenen Ebenen.

Sind x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten, so kann die Gleichung jeder Ebene auf die Form gebracht werden

$$(11) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 - u_0 = 0$$

mit der Bedingung:

$$(12) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Umgekehrt sind diese vier Gröfsen u_0, u_1, u_2, u_3, zwischen deren drei letzten die angegebene Relation besteht, für metrische Zwecke als Koordinaten der Ebene sehr geeignet.

Da die Gleichung (11) die Bedingung dafür angiebt, dafs der Punkt (x) in die Ebene (u) fällt, so mufs auch sein:

$$(u_1 + \delta u_1)(x_1 + \delta x_1) + (u_2 + \delta u_2)(x_2 + \delta x_2) + (u_3 + \delta u_3)(x_3 + \delta x_3) - (u_0 + \delta u_0) = 0,$$

wofern durch irgend eine unendlich kleine Bewegung der Punkt (x_1, x_2, x_3) in $(x_1 + \delta x_1, \ldots)$ und gleichzeitig die Ebene $(u_0 \ldots u_3)$ in $(u_0 + \delta u_0 \ldots)$ übergeht.

Ferner mufs wegen der Gleichung (12) die Bedingung bestehen:

$$u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 + u_3 \delta u_3 = 0.$$

Nun gelten nach 1. für die unendlich kleinen Veränderungen der Variabeln x die Gleichungen:

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} = a_1 - a_5 x_3 + a_6 x_2, \quad \frac{\delta x_2}{\delta t} = a_2 - a_6 x_1 + a_4 x_3,$$

$$\frac{\delta x_3}{\delta t} = a_3 - a_4 x_2 + a_5 x_1.$$

Indem wir diese Werte für δx_1, δx_2, δx_3 einsetzen und berücksichtigen, dafs die auf diese Weise sich ergebende Gleichung für alle Punkte gelten mufs, finden wir:

$$(13) \quad \delta u_1 = (a_5 u_3 - a_6 u_2)\,\delta t, \quad \delta u_2 = (a_6 u_1 - a_4 u_3)\,\delta t,$$
$$\delta u_3 = (a_4 u_1 - a_5 u_2)\,\delta t, \quad \delta u_0 = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)\,\delta t.$$

Als Symbole für die sechs unendlich kleinen Transformationen ergeben sich, wenn wir noch $q_\varkappa$ für $\frac{\partial f}{\partial u_\varkappa}$ schreiben, die folgenden:

$$(14) \quad u_1 q_0,\ u_2 q_0,\ u_3 q_0,\ u_2 q_3 - u_3 q_2,\ u_3 q_1 - u_1 q_3,\ u_1 q_2 - u_2 q_1.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dafs diese Gruppe genau so gebaut ist wie die für die Umwandlung der Punkte geltende Gruppe:

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_2 x_3 - p_3 x_2,\ p_3 x_1 - p_1 x_3,\ p_1 x_2 - p_2 x_1.$$

5. Der euklidische dreidimensionale Raum mit der Geraden als Element.

Wenn man die Geraden des Raumes durch den Schnitt zweier Ebenen (u) und (v) bestimmt, so ist es offenbar für metrische Zwecke am geeignetsten, vorauszusetzen, dafs die Ebenen auf einander senkrecht stehen, dafs also zu der Bedingung (12) und zu der entsprechenden Gleichung zwischen v_1, v_2, v_3 noch die Bedingung hinzutritt:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

Unter dieser Annahme setzen wir:

$$(15)\quad \begin{aligned} &u_0 v_1 - u_1 v_0 = y_1,\ u_0 v_2 - u_2 v_0 = y_2,\ u_0 v_3 - u_3 v_0 = y_3, \\ &u_2 v_3 - u_3 v_2 = y_4,\ u_3 v_1 - u_1 v_3 = y_5,\ u_1 v_2 - u_2 v_1 = y_6. \end{aligned}$$

Alsdann bestehen zwischen den sechs Gröfsen $y_1 \ldots y_6$ die beiden Gleichungen:

$$(16)\quad y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_6 = 0,\ y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1.$$

Bildet man die Variationen $\delta y_\varkappa$ für $y_1 \ldots y_6$ und setzt für $\delta u_\varkappa$ die Werte aus (13) und für $\delta v_\varkappa$ die entsprechenden Werte ein, so wird:

$$\frac{\delta y_1}{\delta t} = - a_2 y_6 + a_3 y_5 + a_6 y_2 - a_5 y_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta y_4}{\delta t} = a_5 y_6 - a_6 y_5$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Gruppe wird also, wenn $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = r_\varkappa$ gesetzt wird, durch die infinitesimalen Transformationen bestimmt:

$$(17)\quad \begin{aligned} &r_2 y_6 - r_3 y_5,\ r_3 y_4 - r_1 y_6,\ r_1 y_5 - r_2 y_4, \\ &r_2 y_3 - r_3 y_2 - r_5 y_6 + r_6 y_5,\ r_3 y_1 - r_1 y_3 - r_6 y_4 + r_4 y_6, \\ &r_1 y_2 - r_2 y_1 - r_4 y_5 + r_5 y_4. \end{aligned}$$

Auch für diese Gruppe läfst sich leicht zeigen, dafs sie gleichen Bau mit der Gruppe der Punkttransformationen eines dreidimensionalen euklidischen Raumes besitzt.

Bei dieser Gelegenheit mögen einige weitere Bemerkungen gestattet sein.

a) Die sechs eingeführten Gröfsen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Es bezeichnen nämlich y_4, y_5, y_6 die Cosinus der Winkel, welche die Gerade mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet; y_1, y_2, y_3 liefern die Momente der Geraden gegen diese drei Achsen, also z. B. y_1 das Produkt aus dem kürzesten Abstand der gegebenen Geraden von der x_1-Achse in den Sinus des von ihnen gebildeten Winkels. Die drei Gröfsen y_1, y_2, y_3 können auch in folgender Weise definiert werden: Man ziehe durch den Anfangspunkt eine Strecke, welche mit der gegebenen Geraden einen rechten Winkel bildet und gleich ist der Senkrechten, welche von diesem Punkte auf die Gerade gefällt wird; die Koordinaten ihres Endpunktes sind y_1, y_2, y_3. Es läfst sich zudem leicht eine allgemeine Vorschrift angeben, nach welcher Richtung die Strecke gezogen werden müsse, damit die sechs Gröfsen $y_1 \ldots y_6$ nicht nur die Gerade selbst bestimmen, sondern auch die Richtung angeben, in der ihre Punkte auf einander folgen sollen. Dies ergiebt sich bei der ersten Erklärung der Gröfsen $y_1 \ldots y_6$ ganz von selbst. Auch die rechtwinkligen Koordinaten eines jeden Punktes (x) der Geraden (y) lassen sich leicht ausdrücken. Soll nämlich der Punkt (x) auf der Geraden (y) liegen und vom Fufspunkte der Senkrechten, die man vom Anfangspunkte auf sie fällt, den Abstand r haben, so ist:

$$x_1 = y_2 y_6 - y_3 y_5 + r y_4$$
$$x_2 = y_3 y_4 - y_1 y_6 + r y_5$$
$$x_3 = y_1 y_5 - y_2 y_4 + r y_6.$$

Wenn die Gerade nicht durch den Anfangspunkt geht, so sind die Gleichungen zweier durch die Gerade zu legender Ebenen:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$
$$x_1 (y_2 y_6 - y_3 y_5) + x_2 (y_3 y_4 - y_1 y_6) + x_3 (y_1 y_5 - y_2 y_4)$$
$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Eine dritte Ebene möge dargestellt werden, indem man die erste Gleichung mit A, die zweite mit B multipliziert und addiert; indem man die Bedingung stellt:

$$A^2 + B^2 = 1,$$

wird A gleich dem Cosinus des Winkels, den die dritte Ebene mit der ersten bildet.

b) Will man, ausgehend von zwei Punkten (x) und (x'), welche in der zu bestimmenden Geraden liegen, zu den Gröfsen (y) gelangen, so wählt man die Punkte so, dafs ihr Abstand gleich eins ist; dann wird:

$$y_1 = x_2 x_3' - x_3 x_2',\ y_2 = x_3 x_1' - x_3 x_1',\ y_3 = x_1 x_2' - x_2 x_1',$$
$$y_4 = x_1 - x_1',\ y_5 = x_2 - x_2',\ y_6 = x_3 - x_3'.$$

c) Es sei gestattet, darauf hinzuweisen, dafs die eingeführten Koordinaten zur Ermittlung metrischer Beziehungen sehr geeignet sind. In dieser Hinsicht erinnere ich daran, dafs, wenn (y) und (y') die Koordinaten zweier Geraden sind, der Ausdruck

$$y_1 y_4' + y_4 y_1' + y_2 y_5' + y_5 y_2' + y_3 y_6' + y_6 y_3'$$

ihr Moment und $y_4 y_4' + y_5 y_5' + y_6 y_6'$ den Cosinus des Winkels darstellt, den die Geraden mit einander bilden. Auch möge noch ein Satz über die allgemeinen (reellen) Komplexe ersten Grades mit Hilfe dieser Koordinaten bewiesen werden.

Soll der durch die Gleichung $\Sigma \alpha_\iota y_\iota = 0$ dargestellte Komplex kein specieller sein, so mufs der Ausdruck $\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6$ einen von null verschiedenen Wert haben. In diesem Falle darf man bei der Annahme reeller Konstanten voraussetzen, dafs

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

ist. Setzt man jetzt

$$\mu_4 = \alpha_1,\ \mu_5 = \alpha_2,\ \mu_6 = \alpha_3,\ \mu_1 = \alpha_4 + \sigma\alpha_1,\ \mu_2 = \alpha_5 + \sigma\alpha_2,$$
$$\mu_3 = \alpha_6 + \sigma\alpha_3,$$

so stellen für

$$-\sigma = \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6$$

die Gröfsen $\mu_1 \ldots \mu_6$ die Koordinaten einer Geraden dar. Dadurch geht die Gleichung des Komplexes über in:

$$(\mu_1 y_4 + \mu_4 y_1 + \mu_2 y_5 + \mu_5 y_2 + \mu_3 y_6 - \mu_6 y_3) = \sigma(\mu_4 y_4 + \mu_5 y_5 + \mu_6 y_6).$$

Hiernach steht das Moment einer jeden Linie (y) des Komplexes mit einer festen Geraden (μ) in einem konstanten Verhältnis zum Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels; mit anderen Worten: Hat eine Linie des Komplexes von der festen Geraden (μ) den Abstand r und bildet sie mit ihr den Winkel φ, so ist das Produkt $r \operatorname{tg}\varphi$ konstant, und zwar

$$r \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

6. Die Geraden des dreidimensionalen Raumes in projektiver Beziehung.

Sind $x_1 \dots x_4$ und $x_1' \dots x_4'$ die homogenen Koordinaten zweier Punkte, so wird durch das Verhältnis der sechs Gröfsen $p_{\iota\varkappa} = x_\iota x_\varkappa' - x_\varkappa x_\iota'$ (für $\iota, \varkappa = 1 \dots 4$) diejenige Gerade bestimmt, welche durch die beiden Punkte hindurchgeht. Dabei gilt die Beziehung:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Jede projektive Umgestaltung des Raumes ändert die Gröfsen $p_{\iota\varkappa}$ vermittelst homogener linearer Gleichungen um, deren Koefficienten so gewählt werden müssen, dafs die angegebene quadratische Form in sich transformiert wird. Man kann aber auch mit Klein

$$z_1 = p_{12} + p_{34}, \quad iz_2 = p_{12} - p_{34}, \text{ u. s. w.}$$

setzen; dadurch geht die Bedingungsgleichung über in

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 = 0.$$

Alsdann wird die Gruppe, durch welche die bei beliebiger projektiver Umgestaltung des Raumes eintretenden Veränderungen der Geraden dargestellt werden, aus den 15 infinitesimalen Transformationen

$$r_\iota z_\varkappa - r_\varkappa z_\iota \qquad (\text{für } \iota, \varkappa = 1 \dots 6)$$

erzeugt, wo $r_\iota = \frac{\partial f}{\partial z_\iota}$ sein soll.

§ 3.

Invarianten von Transformations-Gruppen.

1. Eine intransitive Gruppe führt einen beliebigen Punkt nicht in jeden Punkt seiner Umgebung über, sondern beläfst ihn auf einem gewissen Gebilde A, welches durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Variabeln bestimmt wird. Dies Gebilde wird dann aber durch die Transformationen der Gruppe in sich transformiert; denn sobald irgend einer seiner Punkte a in einen Punkt b übergeführt werden könnte, der dem Gebilde A nicht angehört, könnte jeder Punkt des Gebildes, da er die Überführung nach a gestattet, auch in die Lage des Punktes b gebracht werden; das Gebilde A würde also nicht die Gesamtheit aller Punkte enthalten, in die man den zuerst gewählten Punkt trans-

formieren kann. Hiernach hat jede intransitive Gruppe Invarianten, d. h. gewisse Funktionen der Variabeln bleiben bei allen ihren Transformationen ungeändert.

Umgekehrt ist eine Gruppe intransitiv, sobald sie eine Invariante in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ enthält, denn wenn die Funktion $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert bleibt, so kann der Punkt (x) nur in solche Punkte umgewandelt werden, für welche $\Phi(x_1' \ldots x_n') = \Phi(x_1 \ldots x_n)$ ist.

2. Dies Resultat gilt aber nur, solange man sich auf ein einziges Wertsystem beschränkt; dagegen bleiben bei jeder Gruppe, wie wir nachher zeigen werden, Beziehungen zwischen mehreren Wertsystemen ungeändert; solche Beziehungen mögen Invarianten im weiteren Sinne genannt werden.[24]) Es wird gut sein, dies zunächst an einigen Beispielen zu erläutern.

Sind (x) und (x') zwei verschiedene Punkte in einer n-dimensionalen euklidischen Raumform, so bleibt die Form

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2$$

bei allen ihren Transformationen ungeändert. Ebenso wenn wir die Punkte einer n-dimensionalen nicht-euklidischen Raumform mit dem Riemannschen Krümmungsmafs $= 1 : k^2$ in der vorhin (§ 2, 2) angegebenen Weise durch die $n+1$ Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$ darstellen, so besteht zwischen je zwei Punkten die invariante Beziehung:

$$k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'.$$

Nimmt man in einem dreidimensionalen Euklidischen Raume die Ebene als Element und benutzt die oben eingeführten Variabeln $u_0 \ldots u_3$, so haben je zwei Elemente die Invariante

$$u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3',$$

und für je vier Elemente tritt hinzu:

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_0' & u_1' & u_2' & u_3' \\ u_0'' & u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_0''' & u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}$$

Dagegen giebt es für je zwei Gerade eines dreidimensionalen euklidischen Raumes bereits zwei Invarianten, nämlich:

$$y_4 y_4' + y_5 y_5' + y_6 y_6' \text{ und}$$
$$y_1 y_4' + y_4 y_1' + y_2 y_5' + y_5 y_2' + y_3 y_6' + y_6 y_3',$$

während bei der projektiven Umgestaltung des Raumes zwischen zwei Geraden nur eine Beziehung ungeändert bleibt.

3. Wir wollen jetzt zeigen, dafs auch jede transitive Gruppe Invarianten im weiteren Sinne besitzt. Zu dem Ende denken wir ihre sämtlichen Transformationen auf zwei verschiedene Wertsysteme angewandt; wir setzen also:

$$y_\iota = \varphi_\iota\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r),\; y_\iota{}' = \varphi_\iota\,(x_1{}' = x_n{}';\; u_1 \ldots u_r).$$

Hier haben wir, da die Variabeln $x_1{}' \ldots x_n{}'$ von den $x_1 \ldots x_n$ ganz unabhängig sind, eine r-gliedrige Gruppe mit 2n Variabeln; diese kann intransitiv sein, ohne dafs es die ursprüngliche ist; sie kann also Invarianten besitzen, oder es ist möglich, dafs gewisse Beziehungen zwischen $(x_1 \ldots x_n)$ und $(x_1{}' \ldots x_n{}')$ durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. Man kann aber in gleicher Weise pn Variabele einführen:

$$x_1 \ldots x_n,\; x_1{}' \ldots x_n{}',\; x_1{}'' \ldots x_n{}'' \ldots x_1{}^{(p-1)} \ldots x_n{}^{(p-1)},$$

und sie durch die Transformationen

$$y_\iota = \varphi_\iota\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r),\; y_\iota{}' = \varphi_\iota\,(x_1{}' \ldots x_n{}';\; u_1 \ldots u_r),$$
$$y_\iota{}'' = \varphi_\iota\,(x_1{}'' \ldots x_n{}'';\; u_1 \ldots u_r) \ldots$$

in die Variabeln

$$y_1 \ldots y_n,\; y_1{}' \ldots y_n{}',\; y_1{}'' \ldots y_n{}'' \ldots y_1{}^{(p-1)} \ldots y_n{}^{(p-1)}$$

umwandeln. Diese letzte Gruppe ist ganz gewifs intransitiv, wenn $pn > r$ ist; die gegebene Gruppe hat also Invarianten im weiteren Sinne.

4. Dieser Weg liefert für jede Gruppe unendlich viele Invarianten. Indessen sind dieselben nicht unabhängig von einander, kommen vielmehr auf eine gewisse endliche Zahl hinaus, die höchstens gleich der Zahl n der Variabeln ist. Wir finden dies bei den vorhin angeführten Beispielen bestätigt, können es aber auch sehr leicht beweisen. Zu dem Ende setzen wir voraus, zwischen v Punkten bestehe keine Invariante; gäbe es jetzt zwischen $v + 1$ Punkten mehrere unveränderliche Beziehungen, deren Zahl $m > n$ wäre, so könnte man zwischen den m Gleichungen:

$$J_1\,(x_1 x' \ldots x^{(v)}) = C_1,\; J_2\,(x_1 x' \ldots x^{(v)}) = C_2 \ldots$$
$$J_m\,(x_1 x' \ldots x^{(v)}) = C_m,$$

wo x statt $x_1 \ldots x_n$ gesetzt ist, die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ elimimieren; man erhielte also eine invariante Beziehung zwischen v Punkten.

Nimmt man jetzt einen $v + 2^{ten}$ Punkt x_0 hinzu, so bestehen selbstverständlich die Gleichungen:

$$J_1 (x^0, x^1 \ldots x^{(v)}) = C_1' \ldots J_m (x^0, x^1 \ldots x^{(v)}) = C_m'.$$

Giebt es jetzt zwischen den $v + 2$ Punkten eine weitere invariante Beziehung, so kann man für $m = n$ die $2n$ Variabeln $x_1^0 \ldots x_n^0$, $x_1 \ldots x_n$ aus den niedergeschriebenen Gleichungen eliminieren und in die neue Gleichung einsetzen. Diese mufs jetzt identisch befriedigt werden, oder die neue Beziehung ist eine Folge aus den vorangehenden.

Ganz ähnliche Überlegungen stellt man für $m < n$ an; in allen Fällen überzeugt man sich, dafs sich die Invarianten höchstens auf n von einander unabhängige zurückführen lassen.

5. Um die Invarianten zu finden, kann man einmal von den endlichen Transformationen ausgehen und aus den $(\nu + 1) . n$ Gleichungen:

$$(1) \quad y_\varkappa = \varphi (x_1 \ldots x_n; u_1 \ldots u_r), \; y_\varkappa' = \varphi (x_1' \ldots x_n'; u_1 \ldots u_r) \ldots y_\varkappa^{(\nu)} = \varphi (x_1^{(\nu)} \ldots x_n^{(\nu)}; u_1 \ldots u_r)$$

die r Parameter $u_1 \ldots u_r$ eliminieren. Dadurch erhält man eine oder mehrere Gleichungen von der Form:

$$F (y_1 \ldots y_n; y_1' \ldots y_n'; \ldots) = \Phi (x_1 \ldots x_n; x_1' \ldots x_n' \ldots).$$

Sind die Funktionen F und Φ identisch, so stellt F eine Invariante der Gruppe dar. Wenn aber F und Φ verschiedene Funktionen sind, so beachte man, dafs man in den Gleichungen (1) die Variabeln x mit den Variabeln y vertauschen kann, wofern man nur die Parameter $u_1 \ldots u_r$ durch geeignete Parameter $v_1 \ldots v_r$ ersetzt. Da aber die Parameter ganz entfernt sind, so mufs auch die Gleichung befriedigt werden:

$$F (x_1 \ldots x_n; x_1' \ldots x_n'; \ldots) = \Phi (y_1 \ldots y_n; y_1' \ldots y_n'; \ldots);$$

demnach ist jede symmetrische Funktion von F und Φ eine Invariante.

Wenn nur die infinitesimalen Transformationen der Gruppe gegeben sind:

$$X_\iota f = \sum_\varrho \xi_{\iota\varrho} (x) \frac{\partial f}{\partial x_\varrho},$$

so findet man die Invarianten durch Auflösung von partiellen Differentialgleichungen; für jede Invariante $J (x, x_1 \ldots x^{(\nu)})$ gelten nämlich die Gleichungen:

$$(2)\quad \sum_{\varrho}\left\{\xi_{\iota\varrho}(x)\frac{\delta J}{\delta x_{\varrho}}+\xi_{\iota\varrho}(x)\frac{\delta J}{\delta x_{\varrho}'}+\ldots+\xi_{\iota\varrho}(x^{(\nu)})\frac{\delta J}{\delta x_{\varrho}^{(\nu)}}\right\}=0,$$

oder wenn man

$$X_{\iota}'(f)=\Sigma\,\xi_{\iota\varrho}(x')\frac{\delta f}{\delta x'}\ \text{u. s. w.}$$

setzt:

$$(3)\quad X_{\iota}(J)+X_{\iota}'(J)+\ldots+X_{\iota}^{(\nu)}(J)=0.$$

6. Es ist aus mancherlei Gründen vorteilhaft, die in derselben Invariante vereinigten Wertsysteme unendlich nahe bei einander anzunehmen. Wir setzen also an:

$$x_{\varkappa}'=x_{\varkappa}+d_1x_{\varkappa},\ x_{\varkappa}''=x_{\varkappa}+d_2x_{\varkappa}\ldots x_{\varkappa}^{(\nu)}=x_{\varkappa}+d_{\nu}x_{\varkappa}\ (\varkappa=1\ldots n)$$

und machen die Annahme, dafs die Gröfsen $d_{\alpha}x_{\varkappa}$ unendlich klein sind. Die Invariante $J\,(x, x' \ldots x^{(\nu)})$ möge hierdurch in einen Ausdruck $K\,(x, d_1x \ldots d^{\nu}x)$ übergehen. Allerdings mufs zunächst bewiesen werden, dafs dieser Ausdruck nicht identisch verschwindet. Das würde uns aber hier zu weit führen; für $\nu = 1$ ist dieser Nachweis in aller Strenge von Lie geliefert (Transformations-Gruppen III S. 500).

Aus den Gleichungen $\delta x_{\varrho}=\xi_{\iota\varrho}\delta t$ (für $\varrho = 1\ldots$) folgt

$$\delta dx_{\varrho}=\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}dx_{\sigma}\,\delta t.$$

Setzt man etwa:

$$d_1x_{\varrho}=y_{\varrho},\ d_2x_{\varrho}=y_{\varrho}',\ d_3x_{\varrho}=y_{\varrho}''\ldots,$$

so wird hiernach:

$$\delta y_{\varrho}=\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}y_{\sigma}\,\delta t.$$

Demnach stellen sich die unendlich kleinen Änderungen der Differentiale $y_1 \ldots y_n$ in ihnen selbst durch homogene lineare Funktionen dar, deren Koefficienten Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ sind. Da dasselbe von den Gröfsen y_{ϱ}', $y_{\varrho}'' \ldots$ gilt, so geht die Gleichung (2) über in

$$(4)\quad \sum_{\varrho}\left\{\xi_{\iota\varrho}(x)\frac{\partial K}{\partial x_{\varrho}}+\frac{\partial K}{\partial y_{\varrho}}\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}y_{\sigma}+\frac{\partial K}{\partial y_{\varrho}'}\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}y_{\sigma}'+\ldots\right\}=0,$$

eine Gleichung, welche sich dadurch vor der Gleichung (2) auszeichnet, dafs die Gröfsen y_{ϱ}, $y_{\varrho}' \ldots$ darin nur linear vorkommen.

Gewinnt hierdurch schon der Ausdruck für die Invariante besondere Einfachheit, so kommt noch hinzu, dafs auch die äufsere Form bei Einführung von neuen Variabeln im wesentlichen ungeändert bleibt. Wenn man nämlich die Variabeln x_ϱ durch beliebige von einander unabhängige Funktionen $\varphi_\varrho(x_1 \ldots x_n)$ ersetzt, so gehen die Differentiale y_ϱ (und ebenso $y_\varrho' \ldots$) in homogene lineare Funktionen $\sum_\sigma \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_\varrho} y_\sigma$ dieser Differentiale über.

Ein besonders wichtiger Vorteil, den die Benutzung von unendlich nahen Wertsystemen gewährt, besteht aber darin, dafs die Gesamtheit der Transformationen, welche einen Differentialausdruck unverändert lassen, jedesmal eine Gruppe bildet. Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus einem allgemeinen Satze, den Lie für Differential-Gleichungen bewiesen hat. Da sie aber für die folgenden Untersuchungen sehr wichtig ist, dürfte es passend sein, sie für den einfachsten Fall, dafs die Invariante nur die Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ und die Differentiale $y_1 = dx_1 \ldots y_n = dx_n$ enthält, zu verifizieren.

Sind $\delta x_\varrho = \xi_\varrho \delta t$ ud $\delta x_\varrho = y_\varrho \delta t$ zwei infinitesimale Transformationen, welche der Invariante $J(x_1 \ldots x_n;\, y_1 \ldots y_n)$ genügen, so mufs sein:

$$(5)\quad \Sigma \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} \xi_\varrho + \Sigma \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} d\xi_\varrho = 0,\quad \Sigma \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} \eta_\varrho + \Sigma \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} d\eta_\varrho = 0.$$

Indem ich die beiden Gleichungen nach $x_\varkappa$ differentiiere, die erste auf diese Weise erhaltene Beziehung mit $\eta_\varkappa$, die zweite mit $\xi_\varkappa$ multipliziere, beide nach $\varkappa$ summiere und von einander subtrahiere, folgt die Relation:

$$\sum_{\varkappa,\varrho} \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} \left(\xi_\varkappa \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} - \eta_\varkappa \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} \right) + \frac{\partial^2 J}{\partial x_\varrho \, \partial x_\varkappa} \left(\xi_\varkappa \, d\eta_\varrho - \eta_\varkappa \, d\xi_\varrho \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} \left(\xi_\varkappa \, d \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} - \eta_\varkappa \, d \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial d_\varkappa} \right) \right\} = 0.$$

Ebenso differentiiere ich die Gleichungen (5) nach $y_\varkappa$ und finde in ähnlicher Weise:

$$\sum_{\varkappa,\varrho} \left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial x_\varkappa \, \partial x_\varrho} \left(\xi_\varkappa \, d\eta_\varrho - \eta_\varkappa \, d\xi_\varkappa \right) + \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} \left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} d\eta_\varkappa - \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} \, d\xi_\varkappa \right) \right\} = 0.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorangehenden folgt, wenn ich

$$\zeta_\varrho = \sum_\varkappa \left(\xi_\varkappa \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} - \eta_\varkappa \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} \right)$$

setze, die neue Beziehung:

$$\sum_\varrho \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} \zeta_\varrho + \sum_\varrho \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} d\zeta_\varrho = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs, wenn zwei infinitesimale Transformationen den Differential-Ausdruck J (x, y) ungeändert lassen, die durch ihre Kombination erhaltene Transformation dieselbe Eigenschaft hat, dafs also alle der Forderung genügenden Transformationen eine Gruppe bilden.

Allerdings darf man keineswegs schliefsen, dafs der Invariante notwendig eine endliche Transformations-Gruppe genügt. Über die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen haben wir nichts bewiesen; diese kann auch unendlich grofs sein.

Auch mufs man sich davor hüten, die Wichtigkeit des letzten Satzes zu überschätzen. Legen wir nämlich einen beliebigen Differential-Ausdruck zu Grunde, so wird man vielfach keine infinitesimale Transformation und darum auch keine Gruppe finden, die ihm genügt. Wenn man zu einer Gruppe gelangt, so ist es eine seltene Ausnahme, dafs der gewählte Ausdruck ihre einzige Invariante ist. Im allgemeinen wird die Gruppe mehrere Invarianten besitzen, und dann kann der gegebene Differential-Ausdruck zwar als Funktion der Invarianten dargestellt werden, steht aber zu der Gruppe selbst nur in loser Beziehung.

§ 4.

Die Invariante in einem besonderen Falle.

1. Wir suchen die verschiedenen Formen, welche eine zwischen zwei unendlich nahen Wertsystemen bestehende Invariante einer transitiven Gruppe unter der Bedingung annehmen kann, dafs es zwischen je zwei Wertsystemen nur eine einzige Invariante giebt; dabei wollen wir es als zulässig betrachten, dafs zur Gruppe weitere Invarianten gehören, die von der hier zu ermittelnden unabhängig sind; nur verlangen wir in diesem Falle, dafs für die

weiteren die Zahl der mit einander verbundenen Wertsysteme gröfser ist als zwei. Bei der Lösung dieser Aufgabe beschränken wir uns auf drei Variabele x_1, x_2, x_3, wobei die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 mit y_1, y_2, y_3 bezeichnet werden sollen.[25])

Da die Gruppe transitiv sein soll, so giebt es keine Funktion der Gröfsen x_1, x_2, x_3, welche bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert bleibt. Dagegen verlangen wir, dafs es eine einzige Funktion der sechs Gröfsen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 giebt, welche allen Transformationen der Gruppe genügt. Hiernach hat die Gruppe mindestens fünf Parameter; denn 1. mufs es mindestens drei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen geben, welche ein beliebig gewähltes Wertsystem in alle benachbarten überführen; 2. wenn man x_1, x_2, x_3 ungeändert läfst, so müssen die Gröfsen y_1, y_2, y_3 noch einer zweifach unendlichen Schar von Veränderungen unterworfen werden können. Umgekehrt kann man stets fünf von einander unabhängige unendlich kleine Transformationen so auswählen, dafs sich aus ihnen die Invariante $J(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ bestimmen läfst. Es seien nämlich für $\varrho = 1, 2, 3$; $\iota = 1, 2 \ldots r$, wo r die Gliederzahl der Gruppe angiebt, r von einander unabhängige Transformationen

$$X_\iota f = \sum_\varrho \xi_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}$$

gegeben. Dann mufs die Invariante den r Differential-Gleichungen genügen:

$$(1) \quad \sum_\varrho \xi_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_\varrho} + \sum_\varrho d\xi_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial y_\varrho} = 0.$$

Giebt man der Marke ι fünf verschiedene Werte aus der Reihe $1 \ldots r$, läfst jedesmal einen der sechs Koefficienten $\xi_{\iota 1} \ldots d\xi_{\iota 3}$ weg und bildet vermittelst der übrigen die fünfreihigen Determinanten, so dürfen diese nicht sämtlich bei jeder Wahl der fünf Marken ι identisch verschwinden. Dementsprechend stellen wir die Matrix auf:

$$(2) \quad \left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & d\xi_{11} & d\xi_{12} & d\xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & d\xi_{21} & d\xi_{22} & d\xi_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{51} & \xi_{52} & \xi_{52} & d\xi_{51} & d\xi_{52} & d\xi_{53} \end{matrix} \right\|$$

und nehmen an, dafs die fünf Determinanten, welche man hieraus durch Weglassung einer Vertikalreihe erhält, nicht sämtlich verschwinden. Diese sind, je mit abwechselndem Zeichen, den Ableitungen der Invariante nach den sechs Gröfsen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 proportional. Demnach mufs sein:

$$(3) \quad \frac{\partial J}{\partial y_2} : \frac{\partial J}{\partial y_2} : \frac{\partial J}{\partial y_3} = A_1 : A_2 : A_3,$$

wo A_1 aus (2) durch Weglassung der vierten, $-A_2$ durch Weglassung der fünften und A_3 durch Weglassung der sechsten Kolonne erhalten wird.

Die Gleichungen (3) können, wie die Elemente der Integralrechnung lehren, bekanntlich nicht für beliebige Funktionen A_1, A_2, A_3 bestehen, sondern müssen gewissen Bedingungen unterliegen. Um diese anzugeben, nehme man α, β, γ als gerade Permutation der Marken 1, 2, 3 an und bilde die Funktionen B_1, B_2, B_3 vermittelst der Festsetzung:

$$(4) \quad B_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial y_\beta};$$

dann mufs die Gleichung:

$$(5) \quad A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = 0$$

identisch befriedigt werden. Zugleich führt die Definition (4) auf die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{\partial B_1}{\partial y_1} + \frac{\partial B_2}{\partial y_2} + \frac{\partial B_3}{\partial y_3} = 0.$$

Da ist

$$d\xi_{\iota\varrho} = \frac{\partial \xi_{\iota\varrho}}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \xi_{\iota\varkappa}}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \xi_{\iota\varkappa}}{\partial x_3} y_3,$$

so geht aus der Bildung sofort hervor, dafs die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 vom zweiten Grade in y_1, y_2, y_3 sind; demnach sind B_1, B_2, B_3 lineare Funktionen der Differentiale.

2. Um die Beziehung, in der die drei in y_1, y_2, y_3 quadratischen Formen A_1, A_2, A_3 zu einander stehen, noch deutlicher zu erkennen, wählen wir die obigen fünf Transformationen so, dafs ein gewisses Wertsystem (x') durch die sämtlichen Transformationen $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$ in alle benachbarten übergeführt wird, während es bei den Transformationen $\alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5$ unverändert gelassen wird. Setzen wir also in die Funktionen

$\xi_{\iota\varrho}$ (für $\iota = 1 \ldots 5$, $\varrho = 1, 2, 3$) die Werte x_1', x_2', x_3' ein, so wird

$$\xi_{41} = \xi_{42} = \xi_{43} = 0, \ \xi_{51} = \xi_{52} = \xi_{53} = 0.$$

Setzen wir noch

$$d\xi_{4\varrho} = M_\varrho, \ d\xi_{5\varrho} = N_\varrho,$$

so wird

$$(7) \quad A_\alpha = \varDelta . \ (M_\beta N_\gamma - M_\gamma N_\beta),$$

wo $\varDelta = |\xi_{\iota\varkappa}|$ für $\iota, \varkappa = 1, 2, 3$ ist, und wo die Ausdrücke M_α, N_α lineare Formen von y_1, y_2, y_3 sind. Da das Verhältnis der Ausdrücke A_1, A_2, A_3 sich nicht ändert, wenn man andere fünf geeignete Transformationen zu Grunde legt, so darf man in den Gleichungen (7) die Gröfsen x_1, x_2, x_3 auch als veränderlich voraussetzen, wofern man nur die Verhältnisse berücksichtigt.

3. Für die drei in y_1, y_2, y_3 linearen Formen B_1, B_2, B_3 haben wir vier verschiedene Fälle zu unterscheiden: entweder verschwinden sie identisch, oder sie unterscheiden sich nur durch einen von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Faktor, oder sie lassen sich durch zwei von einander unabhängige lineare Formen darstellen; oder sie sind ganz unabhängig von einander. Mit anderen Worten: zwischen diesen drei Formen bestehen entweder keine oder eine oder zwei oder drei von einander unabhängige Beziehungen, deren Koefficienten blofse Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind. Giebt es keine derartige Beziehung, so sind die Formen unabhängig von einander; dagegen kommt die Existenz von drei wesentlich verschiedenen Beziehungen darauf hinaus, dafs die Formen identisch verschwinden.

Die Frage, ob diese Eigenschaft der Formen B_1, B_2, B_3 für die Invariante und damit für die Gruppe charakteristisch ist, braucht uns nicht zu beschäftigen; es genügt, dafs die Einteilung zu allen Formen für die Invariante führt.

4. Wir nehmen an erster Stelle an, dafs die drei Formen B_1, B_2, B_3 identisch verschwinden. Dann sind die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 die Ableitungen einer homogenen Funktion dritten Grades. Die Invariante ist also in den Differentialen y_1, y_2, y_3 homogen vom dritten Grade.

Da aber die Ableitungen A_1, A_2, A_3 von J die in (7) angegebene Form haben, wo $M_1 \ldots N_3$ lineare Funktionen von y_1, y_2, y_3 sind, so giebt es für jedes beliebige Wertsystem (x')

mindestens drei Verhältnisse der Differentiale, für welche die Ableitungen sämtlich verschwinden. Denn so oft man die Differentiale und einen von x_1, x_2, x_3 abhängigen Faktor derartig bestimmen kann, dafs die Gleichungen bestehen:

$$M_1 = \omega N_1,\ M_2 = \omega N_2,\ M_3 = \omega N_3,$$

erhalten die drei Gröfsen A_1, A_2, A_3 den Wert null. Die Ableitungen einer Form dritten Grades können aber diese Eigenschaft nur haben, wenn die Form selbst in das Produkt dreier linearer Faktoren übergeht. Im angenommenen Falle hat also die Invariante die Form:

$$(8)\quad J = L_1 L_2 L_3,$$

wo L_1, L_2, L_3 lineare Funktionen von y_1, y_2, y_3 sind, deren Koefficienten von den Variabeln x_1, x_2, x_3 abhangen.

5. An zweiter Stelle setzen wir voraus, dafs die Formen B_1, B_2, B_3 nicht identisch verschwinden, dafs sie sich aber nur durch einen Faktor unterscheiden, der von den Differentialen unabhängig ist. Demnach soll sein:

$$(9)\quad B_1 = a_1 C,\ B_2 = a_2 C,\ B_3 = a_3 C,$$

wo C eine (von null verschiedene) lineare Form von y_1, y_2, y_3 ist und die Koefficienten a_1, a_2, a_3 nur von den Variabeln x_1, x_2, x_3 abhangen. Die Gleichung (5) geht über in:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0,$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$a_1 \frac{\partial A_1}{\partial y_\alpha} + a_2 \frac{\partial A_2}{\partial y_\alpha} + a_3 \frac{\partial A_3}{\partial y_\alpha} = 0.$$

Setzt man die Werte (9) in die Gleichung (4) ein, eliminiert aus je zweien die Form C und berücksichtigt die letzte Gleichung, so folgt:

$$a_1 \frac{\partial A_\varrho}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial A_\varrho}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial A_\varrho}{\partial y_3} = 0.$$

Man kann zwei von einander unabhängige lineare Formen M und N von y_1, y_2, y_3 bestimmen, welche den Bedingungen genügen:

$$a_1 \frac{\partial M}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial M}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial M}{\partial y_3} = 0,\quad a_1 \frac{\partial N}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial N}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial N}{\partial y_3} = 0.$$

Da diese denselben Differential-Gleichungen genügen, wie die

Funktionen A_ϱ, so müssen sich diese letzteren vermittelst der beiden linearen Funktionen darstellen lassen; es mufs also sein:

$$A_\varrho = b_\varrho M^2 + 2 c_\varrho MN + e_\varrho N^2.$$

Nun ist wegen der Gleichungen (9) und (6) auch

$$a_1 \frac{\partial C}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial C}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial C}{\partial y_3} = 0;$$

demnach kann man die Form M durch die Form C ersetzen. Alsdann zerlegt sich die Gleichung (4) für jede gerade Permutation α, β, γ der Marken 1, 2, 3 in die beiden Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (b_\beta C + c_\beta N)}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial (b_\gamma C + c_\gamma N)}{\partial y_\beta} &= \tfrac{1}{2} a_\alpha \\ \frac{\partial (c_\beta C + e_\beta N)}{\partial y_\gamma} &= \frac{\partial (c_\gamma C + e_\gamma N)}{\partial y_\beta}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dafs $c_1 C + e_1 N$, $c_2 C + e_2 N$, $c_3 C + e_3 N$ die Ableitungen einer quadratischen Form nach y_1, y_2, y_3 sind. Da sich diese wieder durch C und N darstellen läfst, zudem C noch mit einem von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Faktor multipliziert und N durch $mN + nC$ ersetzt werden kann, so darf man diese Form gleich $\frac{1}{2}(C^2 + N^2)$ setzen. Daraus folgt:

$$(11) \quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial C}{\partial y_1}, \quad c_2 = \frac{\partial C}{\partial y_2}, \quad c_3 = \frac{\partial C}{\partial y_3} \\ e_1 &= \frac{\partial N}{\partial y_1}, \quad e_2 = \frac{\partial N}{\partial y_2}, \quad e_3 = \frac{\partial N}{\partial y_3}. \end{aligned}$$

Da $a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$ und $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$ ist, so folgt aus der für A_ϱ angegebenen Form, dafs auch $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ sein mufs. Daraus ergiebt sich

$$(12) \quad b_\varrho = p c_\varrho + q e_\varrho, \quad a_\alpha = 2 s (c_\beta e_\gamma - c_\gamma e_\beta).$$

Setzt man diese Werte in die ersten Gleichungen (10) ein, so folgt:

$$(12^*) \quad q + s = 1.$$

Zugleich geht der obige Ausdruck für A_ϱ über in:

$$(13) \quad A_\varrho = (p c_\varrho + q e_\varrho) C^2 + 2 c_\varrho RN + e_\varrho N^2.$$

Nun zeigen die Gleichungen (7), dafs es lineare Formen M_ϱ, N_ϱ für $\varrho = 1, 2, 3$ giebt, für welche die Gleichungen erfüllt sind:

$$M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 = 0; \quad N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3 = 0.$$

Indem wir etwa in die erste Gleichung die Werte aus (13) einsetzen und beachten, dafs die Formen C und N von einander unabhängig sind, erkennen wir, dafs für $C = 0$ auch jedesmal $e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3 = 0$ sein mufs, und dafs ebenfalls mit N auch $p(c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 N_3) + q(e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 N_3)$ verschwinden mufs. Wir dürfen daher setzen:

$$e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3 = kC,$$
$$p(c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 M_3) + q(e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3) = lN.$$

Hiernach geht die aus $M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 = 0$ gewonnene Gleichung über in

$$plC + 2lN - 2qkC + kpN = 0,$$

welche verlangt, dafs $pl - 2qk = 0$, $2l + kp = 0$ oder dafs

$$p^2 + 4q = 0$$

ist. Es geht somit der Ausdruck für A_ϱ über in:

$$4A_\varrho = 4c_\varrho (2CN + pC^2) + e_\varrho (4N^2 - p^2 C^2).$$

Die drei quadratischen Formen A_ϱ haben also den Faktor $pC + 2N$ gemeinschaftlich. Beachten wir die Gleichungen (11) und berücksichtigen noch, dafs die Ableitungen von J nach y_1, y_2, y_3 den Funktionen A_1, A_2, A_3 proportional sind, so zeigt sich, dafs J eine blofse Funktion von C und N ist, welche durch Integration einer homogenen linearen Differential-Gleichung mit linearen Koefficienten gefunden wird. Die Theorie einer solchen Differential-Gleichung darf hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden. Indem wir das thun, gelangen wir zu dem Resultate:

»Wenn zwischen den drei Formen B_1, B_2, B_3 zwei lineare Bedingungen bestehen, so hat die Invariante entweder die Form

$$L_1^{\omega_1} L_2^{\omega_2}$$

oder die Form

$$L_1 e^{\lambda \frac{L_2}{L_1}},$$

wo L_1 und L_2 homogen linear in den Differentialen y_1, y_2, y_3 sind.«

6. An dritter Stelle kann zwischen den drei Formen B_1, B_2, B_3 eine, und zwar eine einzige Bedingung:

$$(14) \quad a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0$$

bestehen. Diese führt in Verbindung mit der Gleichung (5) zu den Relationen:

$$\frac{a_2A_3 - a_3A_2}{B_1} = \frac{a_3A_1 - a_1A_3}{B_2} = \frac{a_1A_2 - a_2A_1}{B_3} = R.$$

Wenn hierin nicht jeder Zähler durch seinen Nenner teilbar ist, so ist R ein Bruch, dessen Zähler vom zweiten und dessen Nenner vom ersten Grade in y_1, y_2, y_3 ist. Von diesem Nenner sind B_1, B_2, B_3 nur durch Faktoren verschieden, welche von y_1, y_2, y_3 unabhängig sind. Dieser Fall ist aber soeben erledigt; er erfordert, dafs zwischen B_1, B_2, B_3 noch eine zweite lineare Beziehung besteht. Demnach müssen wir hier voraussetzen, dafs jeder Zähler durch seinen Nenner teilbar ist, und dafs infolge dessen R eine Funktion ersten Grades in y_1, y_2, y_3 ist.

An erster Stelle dürfen wir annehmen, dafs R identisch verschwindet. Dann verhält sich

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} : \frac{\partial J}{\partial y_2} : \frac{\partial J}{\partial y_3} = a_1 : a_2 : a_3, \text{ oder es ist:}$$

$$J = m\,(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3).$$

Dieser Fall ist in der vorhin erhaltenen Form für specielle Fälle der Exponenten eingeschlossen.

Wenn aber die Form R eine eigentliche Form ersten Grades ist, so differentiiere man die Gleichung:

$$(15) \quad a_\beta A_\gamma - a_\gamma A_\beta = B_\alpha R$$

nach y_α und addiere die drei auf diese Weise erhaltenen Gleichungen. Dadurch gelangt man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4), (5), (6) zu der Relation:

$$B_1\frac{\partial R}{\partial y_1} + B_2\frac{\partial R}{\partial y_2} + B_3\frac{\partial R}{\partial y_3} = 0.$$

Weil aber R vom ersten Grade in y_1, y_2, y_3 ist, so stellt diese Gleichung eine lineare Beziehung zwischen B_1, B_2, B_3 dar. Bei der hier gemachten Annahme mufs diese auf die Gleichung (14) hinauskommen, oder es ist:

$$(16) \quad R = \frac{1}{l}\,(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3).$$

Beiläufig zeigt diese Gleichung in Verbindung mit (15), dafs die Ableitungen der Invariante nach den Differentialen bis auf einen von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Ausdruck bezw. gleich sind R^1P_1, R^1P_2, R^1P_3.

Der partiellen Differential-Gleichung:

$$B_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + B_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = 0$$

genügt, wie wir gesehen haben, die Form R. Um ihre weiteren Lösungen zu finden, gehen wir in bekannter Weise von dem System gewöhnlicher Differential-Gleichungen aus:

$$\frac{dy_1}{B_1} = \frac{dy_2}{B_2} = \frac{dy_3}{B_3}.$$

Diese Gleichungen ersetzen wir durch die folgenden:

$$\frac{\Sigma e_\iota dy_\iota}{\Sigma e_\iota B_\iota} = \frac{\Sigma g_\iota dy_\iota}{\Sigma g_\iota B_\iota} = \frac{\Sigma h_\iota dy_\iota}{\Sigma h_\iota B_\iota}.$$

Kann man die Koefficienten so wählen, dafs ist:

$$\Sigma e_\iota y_\iota = \omega_1 \Sigma e_\iota B_\iota, \quad \Sigma g_\iota y_\iota = \omega_2 \Sigma g_\iota B_\iota,$$
$$\Sigma h_\iota y_\iota = \omega_3 \Sigma h_\iota B_\iota,$$

so sind die Lösungen:

$$\left(e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3\right)^{\omega_1} = C_1 \left(g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3\right)^{\omega_2}$$
$$= C_2 \left(h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3\right)^{\omega_3}$$

In unserem Falle möge sein:

$$B_\alpha = \sum_\varrho b_{\alpha\varrho} y_\varrho.$$

Dann ist die aus den Koefficienten $b_{\alpha\varrho}$ gebildete Determinante gleich null, während die Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden; zudem ist infolge der Gleichung (6)

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0.$$

Von den Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \omega & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \omega & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ist also eine gleich null, und die beiden anderen sind entgegengesetzt gleich. Wenn diese also nicht ebenfalls verschwinden, so hat man, weil die verschwindende Wurzel zu der Lösung $\Phi = R$ führt, nur das zu den beiden anderen Wurzeln gehörende Verhältnis zu berücksichtigen. Da diese Wurzeln entgegengesetzt gleich sind, führen sie auf die Lösung:

$$S = (e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3)\,(g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3).$$

Wenn aber die drei Wurzeln verschwinden, so kann man zu der Form R zwei lineare L_1 und L_2 so hinzufügen, dafs zu der Gleichung $dR = 0$ hinzukommt:

$$\frac{dL_1}{nL_2 + nR} = \frac{dL_2}{pR}.$$

Somit ist die zweite Lösung in diesem Falle:

$$\Phi = pRL_1 - \tfrac{1}{2} mL_2{}^2 - nRL_2.$$

Jedenfalls genügt der obigen partiellen Differential-Gleichung neben der linearen Form R noch eine quadratische Form S. Aus den drei Gleichungen:

$$(17)\quad \begin{aligned} &a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 Q_3 = 0 \\ &Q_1 \frac{\partial S}{\partial y_1} + Q_2 \frac{\partial S}{\partial y_2} + Q_3 \frac{\partial S}{\partial y_3} = 0 \\ &P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 = 0 \end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$(18)\quad P_\alpha = a_\alpha V + W \frac{\partial S}{\partial y_\alpha}.$$

Nun liefern die beiden ersten Gleichungen (17) die Relation:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = \left(a_2 \frac{\partial S}{\partial y_3} - a_3 \frac{\partial S}{\partial y_2}\right) : \ldots$$

Da man aber die Funktion S mit einem beliebigen von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Faktor multiplizieren kann, ohne dafs sie aufhört, der zweiten Gleichung (17) zu genügen, so kann man diesen so wählen, dafs ist:

$$(19)\quad Q_\alpha = a_\beta \frac{\partial S}{\partial y_\gamma} - a_\gamma \frac{\partial S}{\partial y_\beta}.$$

Eliminiert man aus zwei Gleichungen (18) die Funktion V und berücksichtigt die Gleichungen (15) und (19), so folgt $W = R$. Indem man die so erhaltenen Werte (18) in (4) einsetzt, ergeben sich im Hinblick auf die Gleichungen (16) und (19) die drei Beziehungen:

$$a_\beta \frac{\partial}{\partial y_\gamma}\left(V - \frac{l+1}{l} S\right) = a_\gamma \frac{\partial}{\partial y_\beta}\left(V - \frac{l+1}{l} S\right).$$

Nun ist nach (18) V eine quadratische Form von y_1, y_2, y_3, also auch $V - \frac{l+1}{l} S$. Die Ableitungen dieser letzten Funktion verhalten sich aber wie die Koefficienten von R, also ist:

$$V = \frac{l+1}{l} S + hR^2.$$

Die quadratische Form S behält aber die durch die zweite Gleichung (17) und die Gleichung (19) geforderte Eigenschaft bei, wenn man das mit einem beliebigen Faktor multiplizierte Quadrat von R hinzufügt. Demgemäfs darf man S so bestimmt denken, dafs

$$V = \frac{l+1}{l} S$$

wird. Alsdann wird

$$A_\alpha = a_\alpha \frac{l+1}{l} S + R \frac{\partial S}{\partial y_\alpha} = (l+1) S \frac{\partial R}{\partial y_\alpha} + R \frac{\partial S}{\partial y_\alpha}$$

oder

$$P_\alpha R^l = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (R^{l+1} S);$$

es ist also

$$J = R^{l+1} S,$$

wo R eine Form vom ersten, S vom zweiten Grade in y_1, y_2, y_3 ist.

Nun haben wir stillschweigend angenommen, dafs $l+1$ von null verschieden ist. Wird aber $l = -1$, so sehen wir, dafs wir $V = 0$ setzen dürfen; es ist daher gestattet, im Schlufsresultat $l + 1 = 0$ zu setzen oder die Invariante wird eine quadratische Form der Differentiale.

Den Fall, dafs R ein Faktor von S ist, brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da er bereits vorher erledigt ist. Demnach bleiben nur die Fälle zu unterscheiden, dafs die beiden Gleichungen $R = 0$ und $S = 0$ entweder durch zwei getrennte (reelle oder imaginäre) Wertsysteme y_1, y_2, y_3 oder durch ein einziges derartiges Wertsystem befriedigt werden. Im ersten Falle können wir setzen: $S = GH + kR^2$, wo G und H (reelle oder komplexe) lineare Formen sind. Ist jetzt noch $G = \Sigma g_\varkappa y_\varkappa$, $H = \Sigma h_\varkappa y_\varkappa$, so wird für $J = R^\lambda S^\mu$

(20) $A_\alpha = k(\lambda + 2\mu) a_\alpha R^2 + \lambda a_\alpha GH + \mu g_\alpha RH + \mu h_\alpha GR.$

Nun existieren nach (7) drei von den Formen B_1, B_2, B_3 verschiedene lineare Formen M_1, M_2, M_3, für welche $\Sigma M_\varkappa A_\varkappa = 0$ ist. Indem wir für die A_α die Werte (20) einsetzen, folgt:

$$[k(\lambda + 2\mu) R^2 + \lambda GH] \Sigma a_\varkappa M_\varkappa + \mu HR \Sigma g_\varkappa M_\varkappa + \mu GH \Sigma h_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dafs für $R = 0$ jedesmal $\Sigma a_\varkappa M_\varkappa = 0$ oder dafs $\Sigma a_\varkappa M_\varkappa = pR$ ist. Die Einsetzung dieses Wertes in die vorstehende Gleichung führt auf die Beziehung:

$$k(\lambda + 2\mu)\, pR^2 + \lambda pGH + \mu H\, \Sigma g_\varkappa M_\varkappa + \mu G\, \Sigma h_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Für $p = 0$ müfste $\Sigma g_\varkappa M_\varkappa = \sigma G$, $\Sigma h_\varkappa M_\varkappa = \sigma H$ sein; wir würden also bis auf einen gewissen Faktor für M_1, M_2, M_3 auf dieselben Werte gelangen, die sich für B_1, B_2, B_3 aus den Formen (20) für A_1, A_2, A_3 ergeben. Dieser Fall ist auszuschliefsen. Ist aber p von null verschieden, so mufs entweder für $G = H = 0$ auch $R = 0$ sein, oder es mufs $k(\lambda + 2\mu) = 0$ sein. Im ersten Falle erkennen wir unmittelbar, dafs die quadratische Form S in das Produkt zweier Formen ersten Grades zerfällt, im zweiten Falle folgt dasselbe aus der Gestalt, welche die rechte Seite der Gleichung (20) annimmt. Die Invariante ist also $J = R^\lambda G^\mu H^\mu$.

Wenn aber den Gleichungen $R = 0$ und $S = 0$ ein einziges Wertsystem genügt, also $S = RG + H^2$ gesetzt werden kann; und wenn dann die Differentiale y_1, y_2, y_3 in G wieder die Koefficienten g_1, g_2, g_3, in H die Koefficienten h_1, h_2, h_3 haben, so wird

$$A_\alpha = a_\alpha(\lambda + \mu)\, RG + \lambda a_\alpha H^2 + 2\mu v h_\alpha RH + \mu g R^2.$$

Jetzt geht die Gleichung $\Sigma A_\varkappa M_\varkappa = 0$ über in

$$[(\lambda + \mu)\, HR + \lambda H^2]\, \Sigma a_\varkappa M_\varkappa + 2\mu RH\, \Sigma h_\varkappa M_\varkappa + \mu R^2\, \Sigma g_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Hieraus ergiebt sich wieder

$$\Sigma a_\varkappa M_\varkappa = pR,$$

und demnach:

$$p(\lambda + \mu)\, RG + \lambda pH^2 + 2\mu H\, \Sigma h_\varkappa M_\varkappa + \mu R\, \Sigma g_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Da der Wert $p = 0$ aus demselben Grunde wie vorher ausgeschlossen ist, mufs

$$\lambda pH + 2\mu v\, \Sigma h_\varkappa M_\varkappa = qR$$
$$(\lambda - \mu)\, pG + \mu\, \Sigma g_\varkappa M_\varkappa = -qH,$$

sein, woraus sich in Verbindung mit (21) nach beliebiger Wahl von p und q die Werte von M_1, M_2, M_3 eindeutig ergeben. Wir erhalten demnach für die Invariante auch noch die Form: $J = (GR + H^2)^\mu R^\lambda$.

7. Es erübrigt jetzt noch, den Fall zu betrachten, dafs die Formen B_1, B_2, B_3 von einander unabhängig sind. Da die Gleichung (5) identisch befriedigt wird, so mufs für dasjenige

Verhältnis der Differentiale y_1, y_2, y_3, für welches B_β und B_γ verschwinden, auch jedesmal A_α gleich null werden. Demnach ist:

$$A_1 = L_2 B_3 - L_3' B_2,\quad A_2 = L_3 B_1 - L_1' B_3,\quad A_3 = L_1 B_2 - L_2' B_1,$$

wo L_1, L_2, L_3, L_1', L_2', L_3' lineare Formen von y_1, y_2, y_3 sind. Hiernach geht die Gleichung (5) über in

$$(L_1 - L_1')\, B_2 B_3 + (L_2 - L_2')\, B_3 B_1 + (L_3 - L_3')\, B_1 B_2 = 0,$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dafs mit B_α auch jedesmal $L_\alpha - L_\alpha'$ verschwindet, oder dafs ist:

$$L_\alpha - L_\alpha' = q_\alpha B_\alpha,$$

wo q_1, q_2, q_3 blofse Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind. Die Einsetzung dieser Werte in die vorangehende Gleichung liefert noch die Beziehung:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

Zugleich wird:

$$\begin{aligned} A_1 &= L_2 B_3 - L_3 B_2 + q_2 B_2 B_3, \\ A_2 &= L_3 B_1 - L_1 B_3 + q_3 B_3 B_1, \\ A_3 &= L_1 B_2 - L_2 B_1 + q_1 B_1 B_2. \end{aligned}$$

Jetzt bestimme man drei Faktoren r_1, r_2, r_3 durch die Forderung:

$$r_2 - r_3 = q_2,\quad r_3 - r_1 = q_1,\quad r_1 - r_2 = q_1,$$

was infolge der zwischen q_1, q_2, q_3 bestehenden Gleichung möglich ist, und setze:

$$L_\alpha = M_\alpha - r_\alpha B_\alpha.$$

Dadurch erhält man folgende Darstellung der Formen A_α:

$$(22)\quad A_\alpha = M_\beta B_\gamma - M_\gamma B_\beta.$$

Da die Formen B_1, B_2, B_3 von einander unabhängig sind, können wir auch die Formen M_1, M_2, M_3 durch B_1, B_2, B_3 darstellen; wir setzen:

$$M_\alpha = \sum_\varrho a_{\alpha\varrho} B_\varrho.$$

Indem wir diese Werte in die Gleichungen (22) einsetzen und dann nach der Vorschrift (4) die Formen B_1, B_2, B_3 bilden, ergeben sich zwischen ihnen lineare Beziehungen. Nun sollen diese Formen B_α von einander unabhängig sein; also müssen die einzelnen Ausdrücke auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichungen dieselben Koefficienten haben.

Demnach ergeben sich die Relationen:

$$(23)\quad \begin{aligned} 1 &= \sum_{\varrho}\left(a_{\beta\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\beta} + a_{\gamma\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\gamma} + a_{\varrho\alpha}\frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\varrho}\right) \\ &\sum\left(a_{\beta\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\gamma} - a_{\varrho\gamma}\frac{\partial B_\beta}{\partial y_\varrho}\right) = 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann man auch in der Form schreiben:

$$1 = \sum_{\varrho,\sigma} a_{\varrho\sigma}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\sigma} - \sum_{\varrho}\left(a_{\alpha\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\alpha} - a_{\varrho\alpha}\frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\varrho}\right).$$

Demnach hat die letzte Summe für $\alpha = 1, 2, 3$ denselben Wert, und da die Addition der drei so erhaltenen Summen den Wert null liefert, so mufs jede für sich verschwinden. Es ist also:

$$(24)\quad \sum_{\varrho} a_{\alpha\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\alpha} = \sum a_{\varrho\alpha}\cdot\frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\varrho}.$$

Setzt man noch $B_\alpha = \sum_{\varrho} b_{\alpha\varrho} y_\varrho$, so gehen die letzten Gleichungen über in:

$$a_{23}b_{32} - a_{32}b_{23} = a_{31}b_{13} - a_{13}b_{31} = a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} = p.$$

In zwei Gleichungen (23) kommt die Differenz $a_{\beta\beta} - a_{\gamma\gamma}$ vor; indem man diese eliminiert, gelangt man zu den Gleichungen:

$$pb_{\alpha\alpha} + a_{\gamma\beta}b_{\beta\alpha}b_{\alpha\gamma} - a_{\beta\gamma}b_{\gamma\alpha}b_{\alpha\beta} = q,$$

wo die Gröfsen p und q von der Wahl der Marken α, β, γ unabhängig sind. Die letzten sechs Gleichungen gestatten, falls die Differenz $b_{23}b_{31}b_{12} - b_{32}b_{21}b_{13}$ von null verschieden ist, die Koefficienten $a_{\beta\gamma}$ durch p und q darzustellen. Indem man die (nicht verschwindende) Determinante der $b_{\iota\varkappa}$ mit β und den Koefficienten von $b_{\iota\varkappa}$ in dieser Determinante mit $\beta_{\iota\varkappa}$ bezeichnet und die mit gewissen Koefficienten multiplizierten Ausdrücke p und q durch λ und μ ersetzt, gelangt man zu folgender Darstellung der Koefficienten $r_{\iota\varkappa}$:

$$a_{\iota\iota} = \lambda b_{\iota\iota} + \frac{\mu}{\beta} b_{\iota\iota} + \nu,\ a_{\iota\varkappa} = \lambda b_{\iota\varkappa} + \frac{\mu}{\beta}\beta_{\varkappa\iota} \qquad (\varkappa \gtrless \iota),$$

und es wird:

$$(25)\quad M_\alpha = \lambda\,(b_{\alpha 1}B_1 + b_{\alpha 2}B_2 + b_{\alpha 3}B_3) + \mu y_\alpha + \nu B_\alpha,$$

wo λ, μ, ν blofse Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind.

Diese Darstellung der Formen M_1, M_2, M_3 führt uns auf das Problem, eine Form $N = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ zu suchen,

welche nur mit einem gewissen Faktor ω multipliziert wird, wenn man die y_1, y_2, y_3 durch B_1, B_2, B_3 ersetzt; dann weist die vorstehende Darstellung darauf hin, dafs die Form N auch nur mit einem Faktor ω' multipliziert wird, wenn man y_1, y_2, y_3 durch M_1, M_2, M_3 ersetzt.

Wir wollen diesen Gedanken durchführen. Die Gleichung

$$(26)\quad \begin{vmatrix} b_{11}-\omega & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\omega & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

hat drei von null verschiedene Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, deren Summe wegen der Gleichung

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$$

verschwindet. Wir behandeln zunächst den Fall, dafs die Wurzeln ungleich sind. Für jede Wurzel $\omega_\varkappa$ haben die drei Unterdeterminanten, welche man durch Auslassung der in einer Horizontalreihe stehenden Elemente erhält, dasselbe Verhältnis. Bestimmt man daher die Gröfsen $c_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 3}$ durch die Forderung

$$c_{\varkappa 1} : c_{\varkappa 2} : c_{\varkappa 3} = \omega_\varkappa^{\,2} + b_{11}\omega_\varkappa + \beta_{11} : \beta_{12} + \omega_\varkappa b_{21} : \beta_{13} + \omega_\varkappa b_{31},$$

und setzt

$$(27)\quad N_\varkappa = c_{\varkappa 1} y_1 + c_{\varkappa 2} y_2 + c_{\varkappa 3} y_3,$$

so ist

$$c_{\varkappa 1} B_1 + c_{\varkappa 2} B_2 + c_{\varkappa 3} B_3 = \omega_\varkappa N_\varkappa .$$

Um die Beziehung der Formen N_1, N_2, N_3 zu den Formen M_α zu erkennen, führe man für den Augenblick die Bezeichnung ein:

$$M_\alpha' = b_{\alpha 1} B_1 + b_{\alpha 2} B_2 + b_{\alpha 3} B_3$$

und bestimme eine lineare Form $N' = c_1' B_1 + c_2' B_2 + c_3 B_3'$ durch die Forderung, dafs $\omega' N' = c_1' M_1' + c_2' M_2' + c_3' M_3'$ sein soll. Die Gröfse ω' ist wieder eine Wurzel der Gleichung (26), und zu jeder gehört wieder ein Verhältnis der Gröfsen c_1', c_2', c_3', welches in der angegebenen Weise bestimmt wird. Setzen wir also

$$N_\varkappa' = c_{\varkappa 1} B_1 + c_{\varkappa 2} B_2 + c_{\varkappa 3} B_3,$$

so folgt:

$$N_\varkappa' = \omega_\varkappa N_\varkappa \text{ und } c_{\varkappa 1} M_1' + c_{\varkappa 2} M_2' + c_{\varkappa 3} M_3' = \omega_\nu^{\,2} N_\varkappa$$

Demnach ist:

$$c_{\varkappa 1}M_1 + c_{\varkappa 2}M_2 + c_{\varkappa 3}M_3 = (\lambda\omega_\varkappa^2 + \mu + \nu\omega_\varkappa)\, N_\varkappa.$$

Nun ist es angebracht, die drei Formen N_1, N_2, N_3 der Darstellung zu Grunde zu legen. Vor allem kommt es darauf an, die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 durch die N_α darzustellen. Das gelingt recht einfach in folgender Weise.

Indem man die zuletzt gefundenen Relationen benutzt, bilde man den Ausdruck:

$$\{\omega_\beta\, (\lambda\omega_\gamma{}^2 + \mu + \nu\omega_\gamma) - \omega_\gamma\, (\lambda\omega_\beta{}^2 + \mu + \nu\omega_\beta)\}\, N_\beta N_\gamma.$$

Dann ergiebt sich unter Anwendung der Gleichungen (22)

$$(\omega_\beta - \omega_\gamma)\, (\lambda\omega_\beta\,\omega_\gamma - \mu)\, N_\beta N_\gamma = (c_{\beta 2}c_{\gamma 3} - c_{\gamma 2}c_{\beta 3})\, A_1 + (c_{\beta 3}c_{\gamma 1} - c_{\gamma 3}c_{\beta 1})\, A_2 + (c_{\beta 1}c_{\gamma 2} - c_{\gamma 1}c_{\beta 2})\, A_3.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert unter Benutzung einer leicht verständlichen Abkürzung:

$$A_\alpha = c_{1\alpha}\tau_1 N_2N_3 + c_{2\alpha}\tau_2 N_3N_1 + c_{3\alpha}\tau_3 N_1N_2.$$

Die Gröfsen A_1, A_2, A_3 werden also die Ableitungen nach y_1, y_2, y_3, wenn man sie mit $N_1^{\tau_1 - 1}\, N_2^{\tau_2 - 1}\, N_3^{\tau_3 - 1}$ multipliziert. Demnach hat die Invariante die Form:

$$J = N_1^{\tau_1}\, N_2^{\tau_2}\, N_3^{\tau_3},$$

wo N_1, N_2, N_3 lineare Formen von y_1, y_2, y_3 sind.

Wenn die Gleichung (26) zwei gleiche Wurzeln hat und für sie alle Unterdeterminanten verschwinden, so erleidet das Resultat keine weitere Änderung, als dafs einer der Exponenten τ_1, τ_2, τ_3 verschwindet. Dieser Fall ist aber bereits erledigt und kommt deshalb hier nicht in Betracht. Da es unmöglich ist, dafs alle drei Wurzeln der Gleichung (26) gleich sind, so haben wir nur noch den Fall zu untersuchen, dafs für die Doppelwurzel die Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden. Dann bestimmen wir die Koefficienten c so, dafs die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} c_{11}B_1 + c_{12}B_2 + c_{13}B_3 &= \omega_1 N_1 \\ c_{21}B_1 + c_{22}B_2 + c_{23}B_3 &= \omega_2 N_2 \\ c_{31}B_1 + c_{32}B_2 + c_{33}B_3 &= \omega_2 N_3 + \varrho N_2. \end{aligned}$$

Zugleich wird jetzt:

$$\begin{aligned} c_{11}M_1' + c_{12}M_2' + c_{13}M_3' &= \omega_1{}^2 N_1 \\ c_{21}M_1' + c_{22}M_2' + c_{23}M_3' &= \omega_2{}^2 N_2 \\ c_{31}M_1' + c_{32}M_2' + c_{33}M_3' &= \omega_2{}^2 N_3 + \sigma N_2. \end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen operieren wir in der vorhin angegebenen Weise und gelangen zu dem Resultate:

$$A_\alpha = c_{1\alpha}\tau_1 N_2^{\,2} + c_{2\alpha}(-\tau_2 N_1 N_3 + \tau_3 N_1 N_2) + c_{3\alpha}\tau_2 N_1 N_2.$$

Demnach wird jetzt die Invariante:

$$J = N_1^{\tau_1} N_2^{\tau_3} \,.\, e^{\tau_2 \frac{N_3}{N_2}}.$$

8. Die vorangehende Entwicklung stützt sich auf die Annahme, dafs die Differenz $b_{23}b_{31}b_{12} - b_{32}b_{21}b_{13}$ von null verschieden ist. Nun ist es zwar nicht schwierig, den ausgeschlossenen Satz in ähnlicher Weise zu erledigen. Indessen dürfte eine Methode den Vorzug verdienen, welche uns nicht zwingt, verschiedene Fälle zu unterscheiden. Wir wollen daher die gewonnenen Resultate auf einem zweiten Wege herleiten. Aus den Gleichungen (23) und (24) folgt für beliebige Gröfsen c_1, c_2, c_3 ganz allgemein:

$$(28) \qquad \sum_{\varrho,\sigma} c_\varrho a_{\varrho\sigma} b_{\sigma\alpha} = \sum c_\varrho b_{\varrho\sigma} a_{\sigma\alpha}.$$

Jetzt bestimme man die Gröfsen c_1, c_2, c_3 so, dafs die drei Gleichungen bestehen:

$$\sum_\varrho c_\varrho b_{\varrho\alpha} = \omega c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Dadurch sind wir wieder auf die Gleichung (26) geführt, und die Gröfsen c ergeben sich unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung wieder aus dem Verhältnis:

$$c_1 : c_2 : c_3 = \omega^2 + b_{11}\omega + \beta_{11} : \omega b_{12} + \beta_{21} : \omega b_{13} + \beta_{31}.$$

In dem Falle, dafs die Gleichung (26) drei verschiedene Wurzeln hat, gehört zu jeder ein System von Koefficienten c. Für jedes derartige System geht die Gleichung (28) über in

$$\sum_{\varrho,\sigma} c_\varrho a_{\varrho\sigma} b_{\sigma\alpha} = \omega \sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\alpha}, \text{ oder}$$

$$\sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\alpha}(b_{\alpha\alpha} - \omega) + \sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\beta} b_{\beta\alpha} + \sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\gamma} b_{\gamma\alpha} = 0.$$

Die Bestimmung der Gröfsen $\sum c_\sigma a_{\sigma 1}$, $\sum c_\sigma a_{\sigma 2}$, $\sum c_\sigma a_{\sigma 3}$ führt also wieder auf die Gleichung (26), und die letzten Gröfsen haben dasselbe Verhältnis wie die Gröfsen c_1, c_3, c_3. Demnach ist:

$$\sum c_\sigma a_{\sigma 1} = \omega' c_1, \quad \sum c_\sigma a_{\sigma 2} = \omega' c_2, \quad \sum c_\sigma a_{\sigma 3} = \omega' c_3.$$

Indem wir diese Gleichungen mit B_1, B_2, B_3 multiplizieren, und die Formen N_1, N_2, N_3 in der früheren Weise einführen, folgen die Beziehungen:

$$c_{\alpha 1} M_1 + c_{\alpha 2} M_2 + c_{\alpha 3} M_3 = \omega_\alpha' (c_{\alpha 1} B_1 + c_{\alpha 2} B_2 + c_{\alpha 3} B_3)$$
$$= \omega_\alpha \omega_\alpha' N_\alpha .$$

Wir können daher jetzt auch die Formen A_1, A_2, A_3 auf die oben angegebene Weise vermittelst der Formen N_1, N_2, N_3 darstellen und gelangen für die Invariante auf die Form:

$$J = N_1^{\tau_1} N_2^{\tau_2} N_3^{\tau_3} .$$

Die Änderungen, welche an dieser Entwicklung angebracht werden müssen, wenn die Gleichung (26) eine Doppelwurzel besitzt, für welche nicht sämtliche Unterdeterminanten verschwinden, sind so unbedeutend, dafs sie nicht erwähnt zu werden brauchen. Dagegen ist jetzt eine genauere Untersuchung für den Fall nötig, dafs für eine Wurzel alle Unterdeterminanten gleich null werden. In diesem Falle benutzen wir zur Darstellung der Gröfsen $b_{\iota\varkappa}$ drei Gröfsen g_1, g_2, g_3, deren Summe nicht verschwindet, und setzen fest, dafs

$$b_{23} b_{31} b_{12} = g_1 g_2 g_3$$

ist. Dann mufs sein:

$$b_{23} b_{32} = g_2 g_3, \quad b_{31} b_{13} = g_3 g_1, \quad b_{12} b_{21} = g_1 g_2 .$$

Die Doppelwurzel ist gleich

$$\omega = -\frac{g_1 + g_2 + g_3}{2}, \text{ und}$$

$$b_{11} = g_1 + \omega, \quad b_{22} = g_2 + \omega, \quad b_{33} = g_3 + \omega .$$

Sobald die Koefficienten c_1, c_2, c_3 der Bedingung genügen:

$$(29) \quad c_1 (b_{11} - \omega) + c_2 b_{21} + c_3 b_{31} = 0,$$

werden auch die beiden entsprechenden Gleichungen befriedigt, sowie die drei Gleichungen:

$$\sum_\sigma c_\sigma \{ a_{\sigma\alpha} (b_{\alpha\alpha} - \omega) + a_{\sigma\beta} b_{\beta\alpha} + a_{\sigma\gamma} c_{\gamma\alpha} \} = 0.$$

Genügen die Koefficienten c jetzt noch zwei von den Gleichungen:

$$\Sigma c_\sigma a_{\sigma 1} = \omega' c_1, \quad \Sigma c_\sigma a_{\sigma 2} = \omega' c_2, \quad \Sigma c_\sigma a_{\sigma 3} = \omega' c_3,$$

so genügen sie auch der dritten. Nun ist die Gleichung

$$\Sigma c_\sigma a_{\sigma 1} : \Sigma c_\sigma a_{\sigma 2} = c_1 : c_2$$

vom zweiten Grade in c_1, c_2, c_3; man genügt ihr in Verbindung mit der Gleichung (29) entweder durch zwei verschiedene Systeme c_1, c_2, c_3 oder durch ein einziges. Dementsprechend erhalten wir für die Invariante wieder eine der beiden Formen, die wir in Nr. 7 angegeben haben.

9. Die verschiedenen Ausdrücke, welche wir durch die vorangehende Entwicklung für die Invariante erhalten haben, lassen sich auf die wenigen Typen zurückführen:

$$L^\lambda M^\mu N^\nu, \; L^\lambda M^\mu e^{\mu \frac{N}{M}}, \; L^\lambda Q^\mu,$$

wo Q eine quadratische Form, L, M, N lineare Formen in den Differentialen sind, und wo einzelne unter den Exponenten auch gleich null sein können. Auch müssen im letzten Ausdruck, wenn die Exponenten λ und μ beide von null verschieden sind, die Formen L und Q in der Beziehung stehen:

$$Q = LM + N^2,$$

wo M und N noch zu bestimmende lineare Formen sind.

10. Gehen wir jetzt wieder auf die Matrix (2) zurück. Die aus ihr gebildeten Determinanten liefern uns die Verhältnisse der Ableitungen der Invariante nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 und nach den Differentialen y_1, y_2, y_3. Dadurch, dafs soeben die verschiedenen Typen angegeben sind, welche die Invariante als Funktion der Differentiale annehmen kann, sind die Ableitungen nach den Differentialen selbst gegeben. Demnach kennen wir den Multiplikator, mit dem wir die einzelnen Determinanten multiplizieren müssen, wenn sie den Ableitungen gleich werden sollen. Somit sind auch die Ableitungen nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 bekannt.

Dieser Weg dürfte besonders geeignet sein, die verschiedenen Formen zu bestimmen, welche die Invariante als Funktion von x_1, x_2, x_3 annehmen kann. Indessen ist diese Kenntnis für unsern nächsten Zweck nicht notwendig. Demnach dürfen wir uns mit folgender Bemerkung begnügen.

Sind α und β zwei (gleiche oder ungleiche) Marken aus der Reihe 1, 2, 3 und setzen wir:

$$\frac{\partial J}{\partial x_\alpha} : \frac{\partial J}{\partial y_\beta} = R_\alpha : A_\beta,$$

so zeigt ein Blick auf die aus der Matrix (2) gebildeten Determinanten, dafs R_α vom dritten, A_β vom zweiten Grade in den Differentialen ist.

Legen wir für J die soeben angegebenen Ausdrücke zu Grunde, so erkennen wir, dafs die Exponenten λ, μ, ν auch von den Variabeln x_1, x_2, x_3 unabhängig, also blofse Konstante sind. Einem dieser Exponenten dürfen wir, falls er nicht verschwindet, einen beliebigen von null verschiedenen Wert beilegen, ihn also etwa gleich eins setzen.

§ 5.

Über die Gruppen, welche einer in den Differentialen homogenen linearen Gleichung genügen.

1. Für unsern nächsten Zweck ist es nicht notwendig, alle Gruppen aufzustellen, zu denen die vorangehende Untersuchung führt; wir wollen aber an einer späteren Stelle im stande sein, aus den Gruppen, zu denen eine Invariante von der angegebenen Art gehört, diejenigen auszuscheiden, für welche bei der Ruhe eines Punktes ein den Punkt enthaltendes Gebilde in sich verbleibt. Zu dem Ende ist es gut, eine allgemeine Untersuchung einzuschalten, deren Wesen wir zunächst charakterisieren wollen.

Ist die Gleichung $R = 0$ homogen in den Differentialen, so gehört zu jedem Wertsystem x_1, x_2, x_3 der Variabeln eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Differentialen y_1, y_2, y_3, für welche die Gleichung erfüllt ist. Wenn jetzt die Invariante einer Gruppe die Form hat $R^\varrho S$, wo ϱ von null verschieden ist, so darf jene Mannigfaltigkeit durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. Alle Transformationen der Gruppe, bei denen ein Punkt in Ruhe bleibt, führen die von ihm ausgehenden Differentiale, welche der Gleichung genügen, wieder in solche Differentiale über; wenn aber ein Punkt (x) in (x') übergeführt wird, so verwandelt sich die angegebene Mannigfaltigkeit der von (x) ausgehenden Differentiale in die Gesamtheit derjenigen Differentiale, welche der Gleichung $R = 0$ genügen, nachdem noch die Werte x_1, x_2, x_3 durch x_1', x_2', x_3' ersetzt sind. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe die Gleichung $R = 0$ befriedigen. Mit anderen

Werten, sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Komponenten einer unendlich kleinen Transformation der Gruppe, so mufs jedesmal die Gleichung erfüllt sein:

$$\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial R}{\partial y_\alpha}\, d\xi_\alpha\right) = \omega R,$$

wo ω eine beliebige Funktion von x_1, x_2, x_3 ist.

Nun setzen sich die Invarianten aus linearen und quadratischen Formen zusammen; demnach fragen wir zuerst nach denjenigen Gruppen, welche einer Gleichung ersten Grades genügen, und dann nach denjenigen, durch welche eine Gleichung zweiten Grades befriedigt wird. Die erste Aufgabe soll uns in diesem, die zweite im folgenden Paragraphen beschäftigen.

2. In der Gleichung

$$(1) \quad A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = 0$$

mögen A_1, A_2, A_3 beliebige Funktionen der Variabeln x_1, x_2, x_3 sein. Soll diese Gleichung durch eine infinitesimale Transformation, deren Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind, nicht geändert werden, so mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$(2) \quad \sum_\varrho A_\varrho\, d\xi_\varrho + \sum_{\varrho,\sigma} \frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\sigma}\xi_\sigma\, dx_\varrho = \omega \Sigma A_\varrho\, dx_\varrho.$$

Indem wir hierin $d\xi_\varrho$ durch $\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_3}dx_3$ ersetzen und die Koefficienten von dx_1, dx_2, dx_3 auf beiden Seiten einander gleich setzen, zerlegt sie sich in drei verschiedene. Um diese recht übersichtlich zu schreiben, führen wir folgende Bezeichnungen ein, wobei wieder α, β, γ eine gerade Permutation der Marken 1, 2, 3 bezeichnet:

$$A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 = \varphi$$

$$(3) \quad B_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta}$$

$$C = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

Offenbar ist jetzt wieder:

$$(4) \quad \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0.$$

Indem wir diese Bezeichnung anwenden, können wir den Bedingungsgleichungen folgende Form geben:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + B_3\xi_2 - B_2\xi_3 = \omega A_1\\
(5)\quad &\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + B_1\xi_3 - B_3\xi_1 = \omega A_2\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + B_2\xi_1 - B_1\xi_2 = \omega A_3.
\end{aligned}$$

Die zweite dieser Gleichungen multiplizieren wir mit A_3, die dritte mit A_2 und subtrahieren sie von einander. In der neuen Gleichung addieren und subtrahieren wir $A_1\xi_1$ und gelangen, indem wir je zwei der Gleichungen (5) in entsprechender Weise behandeln und die Bezeichnung (3) berücksichtigen, zu den neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&C\xi_1 = B_1\varphi + A_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - A_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\\
(6)\quad &C\xi_2 = B_2\varphi + A_1\frac{\partial\psi}{\partial x_3} - A_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\
&C\xi_3 = B_3\varphi + A_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - A_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

Dadurch, dafs man die Gleichungen (5) der Reihe nach mit B_1, B_2, B_3 multipliziert und addiert, erhält man die weitere Gleichung:

$$(7)\quad C\omega = B_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + B_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}.$$

Wofern also die Gröfse C nicht identisch verschwindet, gestatten die Gleichungen (6) und (7), die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 jeder infinitesimalen Transformation und die unbekannte Gröfse ω durch eine willkürliche Funktion φ (x_1, x_2, x_3) der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 darzustellen. Wir sehen, dafs unserer Forderung in diesem Falle eine unendliche Gruppe genügt.

Wenn die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 identisch verschwinden, so mufs nach der ersten Gleichung (3) auch φ identisch gleich null sein. Demnach gehören zu ungleichen Funktionen φ und φ_1 auch verschiedene infinitesimale Transformationen. Führten nämlich φ und φ_1 zu denselben Werten von ξ_1, ξ_2, ξ_3, so lieferte die Funktion $\varphi - \varphi_1$ verschwindende Werte der Komponenten, was nicht möglich ist.

Werden zwei infinitesimale Transformationen durch die

Funktionen φ und ψ bestimmt, so gehört die aus ihrer Kombination erhaltene Transformation, wie wir beiläufig bemerken möchten, zu der Funktion:

$$\frac{1}{C}\left\{\Sigma B_\varrho\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_\varrho}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\varrho}\right)-A_1\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x_2,x_3)}-A_2\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x_3,x_1)}\right.$$
$$\left.-A_3\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x_1,x_2)}\right\},$$

wo das Symbol $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x_\alpha,x_\beta)}$ die Funktionaldeterminante von φ und ψ nach x_α und x_β bezeichnet.

3. Ist die Form

$$(8)\quad A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

die Invariante einer Gruppe, soll sie also durch ihre Transformationen nicht geändert werden, so mufs $\omega = 0$ sein. Bei einem nicht verschwindenden Werte von C ist die Funktion φ, von der die Komponenten nach (6) abhangen, wegen der Gleichung (6) nicht willkürlich, sondern mufs der Differentialgleichung genügen:

$$(9)\quad B_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+B_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=0.$$

Die Gruppe ist wieder unendlich, aber ihre Transformationen hangen nicht mehr von einer beliebigen Funktion dreier Variabeln, sondern nur von denjenigen Funktionen ab, die einer Differentialgleichung genügen. Sind ψ und χ zwei wesentlich verschiedene Lösungen, so ist bekanntlich die allgemeine Lösung eine beliebige Funktion von ψ und χ, also

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(\psi, \chi).$$

Damit der Punkt (x′) durch die Transformation (ξ_1, ξ_2, ξ_3) in Ruhe gehalten werde, mufs, wie die Gleichungen (3) und (5) für $\omega = 0$ zeigen, nicht nur $\varphi(x') = 0$ sein, sondern es müssen auch $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ nach Einsetzung von x_1', x_2', x_3' verschwinden. Nun werden die Gleichungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}:\frac{\partial\psi}{\partial x_2}:\frac{\partial\psi}{\partial x_3}=\frac{\partial\chi}{\partial x_1}:\frac{\partial\chi}{\partial x_2}:\frac{\partial\chi}{\partial x_3}$$

infolge der Gleichung (9) für die Punkte einer gewissen Fläche

erfüllt. Gehört der Punkt (x′) dieser Fläche nicht an, hat er, wie man sich ausdrückt, allgemeine Lage, so mufs die Funktion Φ so gewählt werden, dafs für ihn $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = 0$ ist. Dann werden diese drei Gleichungen aber auch für diejenigen Werte erfüllt, für welche ψ und χ dieselben Werte haben wie für x_1', x_2', x_3'; mit anderen Worten, die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 verschwinden für alle Punkte der Linie:

$$\psi(x) = \psi(x'),\ \chi(x) = \chi(x').$$

Dadurch haben wir folgenden Lehrsatz gewonnen:

»Wenn die Invariante einer Gruppe in drei Veränderlichen für zwei unendlich nahe Wertsysteme in eine lineare Form der Differentiale übergeht, deren Koefficienten die Eigenschaft haben, dafs die durch die beiden letzten Gleichungen (3) definierte Gröfse C von null verschieden ist, so lassen alle Transformationen dieser Gruppe, bei denen ein Wertsystem, das nicht besonderen Bedingungen unterliegt, unverändert bleibt, auch die Wertsysteme einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ungeändert, und dieser Mannigfaltigkeit gehört das gegebene Wertsystem selbst an. Unterwirft man den Raum den durch diese Gruppe gegebenen Umformungen, so geht durch jeden Punkt des Raumes eine Linie von der Eigenschaft, dafs alle Punkte dieser Linie jedesmal ihre Lage beibehalten, sobald einer ihrer Punkte in Ruhe gehalten wird.«

4. Wenn identisch $C = 0$ ist, so kommen die vier Gleichungen (6) und (7) auf zwei von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen hinaus. Hätten diese keine gemeinschaftliche Lösung, so würden nur solche Transformationen der Forderung genügen, welche sich aus den Gleichungen (3) und (5) für $\varphi = 0$ ergeben. Da aber hiernach zwischen den Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 eine homogene lineare Beziehung bestände, müfste die Gruppe intransitiv sein. Damit eine transitive Gruppe der Bedingung genügt, müssen die angegebenen Differentialgleichungen eine Lösung $\varphi = M(x_1, x_2, x_3)$ haben. Jetzt setze man

$$A_\alpha = MN_\alpha,$$

wodurch $B_\alpha = M\left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial N_\gamma}{\partial x_\beta}\right) + N_\beta \frac{\partial M}{\partial x_\gamma} - N_\gamma \frac{\partial M}{\partial x_\beta}$ für eine

gerade Permutation α, β, γ wird. Indem wir in den Gleichungen (6) den Gröfsen A_α und B_α diese Werte geben und φ durch M ersetzen, folgt

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial N_\gamma}{\partial x_\beta},$$

oder es sind N_1, N_2, N_3 die Ableitungen einer Funktion N nach den Variabeln x_1, x_2, x_3. Zugleich wird

$$B_\alpha = \frac{\partial N}{\partial x_\beta}\frac{\partial M}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial N}{\partial x_\gamma}\frac{\partial M}{\partial x_\beta}.$$

Jetzt gehen die Gleichungen (6) für ein beliebiges φ über in

$$\frac{\partial N}{\partial x_\beta}\frac{\partial\left(\frac{\varphi}{M}\right)}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial N}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\left(\frac{\varphi}{M}\right)}{\partial x_\beta}.$$

Daraus folgt, dafs der Quotient $\frac{\varphi}{M}$ eine blofse Funktion von N ist, oder dafs

$$\varphi = M\psi(N)$$

sein mufs. Umgekehrt erkennt man auch sofort, dafs, wofern M irgend eine Lösung der gegebenen Differentialgleichungen ist und die Funktion N in der angegebenen Weise daraus bestimmt wird, die Funktion $\varphi = M\psi(N)$ für eine beliebige Funktion ψ von N den Gleichungen (6) und (7) genügt. Die erste Gleichung (3) geht jetzt über in

$$(10)\quad \frac{\partial N}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial N}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial N}{\partial x_3}\xi_3 = \psi(N),$$

und jede Gleichung (5) nimmt die Form an:

$$M\psi'(N)\frac{\partial N}{\partial x_\alpha} + \left(\xi_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial M}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial M}{\partial x_3}\right)\frac{\partial N}{\partial x_\alpha}$$
$$= \omega M\frac{\partial N}{\partial x_\alpha},$$

oder führt auf die Relation:

$$(11)\quad \omega M = M\psi'(N) + \xi_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial M}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial M}{\partial x_3}.$$

Nachdem M und N in der angegebenen Weise bestimmt sind, hangen die Gröfsen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ω in der durch die Gleichungen (10) und (11) dargestellten Weise von einer beliebigen

Funktion ψ (N) von N ab. Wie wir sehen, sind auch nach Annahme dieser Funktion die Werte von ξ_1, ξ_2, ξ_3 noch nicht bestimmt; sie müssen nur so gewählt werden, dafs sie der Gleichung (10) genügen; dann ist ω durch die letzte Gleichung vollständig gegeben.

Nun stellt die linke Seite von (10) bis auf einen unendlich kleinen Faktor die Änderung dar, welche die Funktion N durch eine infinitesimale Transformation (ξ_1, ξ_2, ξ_3) erleidet. Die Transformationen der Gruppe ändern also den Ausdruck N nicht beliebig, sondern verwandeln ihn regelmäfsig in eine blofse Funktion von N selbst. Demnach geht jede Fläche der Schar $N(x_1, x_2, x_3) = \text{Const.}$ in eine Fläche derselben Schar über. Alle Transformationen, bei denen ein Punkt (x') in Ruhe gehalten wird, verschieben demnach die Fläche

$$N(x_1, x_2, x_3) = N(x_1', x_2', x_3')$$

in sich. Wir haben also den Lehrsatz erhalten:

»Wenn die Koefficienten A_1, A_2, A_3 der Bedingung genügen, dafs die aus ihnen nach der Vorschrift (3) gebildete Gröfse C identisch verschwindet, so genügen der Gleichung (1) nur solche transitive Gruppen, bei denen eine gewisse Flächenschar in sich transformiert wird; alle Transformationen dieser Gruppe, bei denen ein Punkt in Ruhe gehalten wird, verschieben eine durch den Punkt gehende Fläche in sich.«

Auf die Vereinfachungen, welche in den Formeln eintreten, wenn M eine blofse Konstante ist, wollen wir nur hinweisen; es ist für unsern Zweck nicht notwendig, hierbei zu verweilen.

5. So einfach die voranstehende Herleitung ist, wird es doch angebracht sein, sie durch eine andere zu ersetzen, bei der wir aus den Lehrbüchern der Integralrechnung den Satz voraussetzen, dafs für ein identisch verschwindendes C die Koefficienten A_1, A_2, A_3 den Ableitungen einer Funktion N nach den Variabeln proportional sind. Setzt man also

$$A_\alpha = M \frac{\partial N}{\partial x_\alpha}$$

in die Gleichung (2) ein und benutzt die Abkürzungen:

$$\Sigma\, \xi_\varrho \frac{\partial N}{\partial x_\varrho} = P, \quad \Sigma\, \xi_\varrho \frac{\partial M}{\partial x_\varrho} = Q,$$

so gehen aus ihr nach Division durch M die drei Relationen hervor:

$$\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = \left(\omega - \frac{Q}{M}\right)\frac{\partial N}{\partial x_\alpha}.$$

Daraus folgt, dafs P eine blofse Funktion ψ (N) von N und dafs $\omega - \frac{Q}{M} = \psi'$ (N) ist. Dadurch sind wir wieder auf die Gleichungen (10) und (11) zurückgeführt.

6. Wenn eine Gruppe zwei Gleichungen

$$(12) \quad \begin{aligned} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 &= 0 \\ A_1' dx_1 + A_2' dx_2 + A_3' dx_3 &= 0 \end{aligned}$$

genügt, die in den Differentialen linear sind, so wird durch die Gruppe auch jede Gleichung befriedigt:

$$(A_1 + KA_1') \, dx_1 + (A_2 + KA_2') \, dx_2 + (A_3 + KA_3') \, dx_3 = 0,$$

wo K eine ganz beliebige Funktion von x_1, x_2, x_3 ist. Nun setze man $A_\alpha'' = A + KA_\alpha'$ und bilde B_α' und C' aus den A_α', sowie B_α'' und C'' aus den A_α'' in derselben Weise, wie die Ausdrücke B_α und C aus den A_α gebildet werden. Dabei wird:

$$(13) \quad - C'' = C + K(A_1 B_1' + A_2 B_2' + A_3 B_3' + A_1' B_1 + A_2' B_2 + A_3' B_3) + K^2 C' + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1' & A_2' & A_3' \\ \frac{\partial K}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Die Forderung, dafs C'' identisch verschwinden soll, führt für die Funktion K auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die Funktion selbst im zweiten Grade vorkommt. Dafs jede solche Differentialgleichung eine Lösung hat, ist bekannt. Wir überzeugen uns aber leicht, dafs es im allgemeinen zwei wesentlich verschiedene Lösungen dieser Gleichung giebt. Ist nämlich K_1 eine Lösung, so ersetze man A_α' durch $A_\alpha + K_1 A_\alpha'$; dann wird die aus den neuen A_α' hergeleitete Gröfse C' gleich null. Zur Bestimmung von K bleibt aber jetzt noch eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Jetzt seien K_1 und K_2 zwei verschiedene Funktionen, für welche die rechte Seite von (13) verschwindet. Dann werden die drei Ausdrücke $A_\alpha + K_1 A_\alpha'$ proportional den Ableitungen

einer Funktion N_1, und $A_\alpha + K_2 A_{\alpha'}$ proportional den Ableitungen einer Funktion N_2 nach den Variabeln. Bei den Transformationen der Gruppe geht also der Ausdruck N_1 in eine Funktion von sich selbst über, und ebenso der Ausdruck N_2. Wir erhalten also den Satz:

»Wenn man den Raum durch eine Gruppe umgestaltet, welche zwei in den Differentialen linearen Gleichungen genügt, so giebt es zwei Scharen von Flächen, welche die Eigenschaft haben, dafs alle Flächen der Schar nur in Flächen derselben Schar übergeführt werden. Alle Transformationen der Gruppe, welche die Lage eines Punktes ungeändert lassen, verschieben zwei Flächen in sich.«

§ 6.

Über die Gruppen, welche einer in den Differentialen quadratischen Gleichung genügen.

1. Die vollständige Lösung der Aufgabe, alle Gruppen zu bestimmen, welche der Gleichung

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} dx_\iota \, dx_\varkappa = 0$$

genügen, wo die Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ Funktionen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sind, bietet deshalb besondere Schwierigkeit, weil die Koefficienten einen wesentlichen Einflufs auf die Gruppe haben. Indessen ist die Ermittelung der Beziehungen, welche zwischen den Koefficienten bestehen müssen, falls überhaupt eine unendlich kleine Transformation der Gruppe genügt, für uns ohne Interesse. Für unsere späteren Anwendungen ist nur der Fall wichtig, dafs die Gruppe nicht nur transitiv ist, sondern auch noch Transformationen enthält, bei denen ein beliebiges Wertsystem ungeändert bleibt. Um diejenigen Gruppen zu finden, welche diese beiden Forderungen erfüllen, können wir uns im wesentlichen ganz einem Verfahren anschliefsen, das Lie[26]) bei einer etwas verschiedenen Voraussetzung eingeschlagen hat. Bei der Verschiedenheit der Forderungen werden wir aber noch zu einer Reihe von Gruppen gelangen, die bei Lie entweder ganz fehlen oder von einem anderen Ausgangspunkte aus gewonnen werden.

2. Den Fall, dafs die Determinante der Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ identisch verschwindet, brauchen wir nicht durchzuführen; es

genügt für unsern Zweck, auf eine Eigenschaft hinzuweisen, welche die entsprechenden Gruppen unter dieser Bedingung besitzen. In diesem Falle läfst sich nämlich die linke Seite von (1) als das Produkt zweier (reeller oder komplexer) linearer Formen M und N darstellen; die Gruppe, welche der Gleichung (1) genügt, befriedigt die beiden linearen Gleichungen $M = 0$ und $N = 0$. Wir kommen demnach auf den Fall zurück, den wir am Schlufs des vorigen Paragraphen betrachtet haben. Wie wir dort gefunden haben, giebt es alsdann zwei Flächenscharen von der Eigenschaft, dafs die Flächen einer jeden Schar nur in Flächen derselben Schar umgewandelt werden. Bei der Ruhe eines Punktes werden also zwei Flächen in sich bewegt.

3. Um so sorgfältiger müssen wir auf den Fall eingehen, dafs die Determinante $|A_{\iota\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet, die linke Seite von (1) also eine eigentliche Form zweiten Grades in den Differentialen ist. Dabei machen wir die specielle Annahme, dafs diese Determinante auch nicht gleich null wird, wenn man in ihren Elementen für x_1, x_2, x_3 das Wertsystem (0, 0, 0) einsetzt. Wofern diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, kann man sie dadurch verwirklichen, dafs man zu den Variabeln gewisse Konstanten addiert und die Summen als neue Veränderliche einführt. Nimmt der Koefficient $A_{\iota\varkappa}$ für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ den Wert $A^0_{\iota\varkappa}$ an, so soll sich die Form $\Sigma A^0_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ nicht als das Produkt von zwei linearen Faktoren darstellen lassen. Dann kann man aber durch eine lineare Umgestaltung der Differentiale dx_1 dx_2, dx_3, bei der auch komplexe Gröfsen zugelassen werden, die Form $\Sigma A^0_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ in die Summe dreier Quadrate verwandeln; man darf also annehmen, dafs ist:

$$(2) \quad A^0_{\iota\iota} = 1, \; A^0_{\iota\varkappa} = 0 \qquad \text{für } \iota \gtrless \varkappa.$$

Dementsprechend sehen wir in den folgenden Untersuchungen von der Form $\Sigma A_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ an sich ab und verlangen nur, dafs sie für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die Gestalt annimmt: $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$.

4. In der infinitesimalen Transformation, welche die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 hat und die wir wieder symbolisch in der Form $\Sigma \xi_\iota p_\iota$ schreiben, entwickeln wir die einzelnen Komponenten nach Potenzen der Variabeln. Da unsere Gruppe transitiv sein soll, der Punkt (0, 0, 0) somit in alle Lagen seiner Um-

gebung übergeführt werden kann, müssen die Transformationen vorkommen:

(3) $P_1 = p_1 + \dots,\ P_2 = p_2 + \dots,\ P_3 + p_3 + \dots,$

wo die fehlenden Glieder die Variabeln (x) mindestens in der ersten Potenz enthalten. Von allen weiteren in der Gruppe enthaltenen infinitesimalen Transformationen dürfen wir die P_1, P_2, P_3 abziehen, nachdem wir sie mit beliebigen konstanten Faktoren multipliziert haben. Demnach dürfen wir mit Lie annehmen, dafs in allen weiteren Transformationen die Variabeln mindestens in der ersten Potenz vorkommen. Beginnt aber eine Transformation mit den Gliedern $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta$ und enthalten die fehlenden Glieder nur höhere Potenzen der Variabeln, so mufs, damit für die Anfangsglieder $dx_1 d\xi_1 + dx_2 d\xi_2 + dx_3 d\xi_3 = \omega\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ wird, sein:

(4) $a_{\alpha\alpha} = a_{\beta\beta},\ a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0 \qquad \text{für } \alpha \gtrless \beta.$

Demnach können alle infinitesimalen Transformationen erster Ordnung aus den vier folgenden zusammengesetzt werden:

(5) $S_{23} = x_2 p_3 - x_3 p_2 + \dots,\ S_{31} = x_3 p_1 - x_1 p_3 + \dots,$
$S_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \dots,\ U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots,$

wo die fehlenden Glieder mindestens die zweiten Potenzen der Variabeln enthalten.

5. Solange wir also in der Entwicklung der sämtlichen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung nur die Glieder der ersten Dimension betrachten, ist die Zahl der von einander unabhängigen höchstens gleich vier; diese Zahl kann aber auch eine kleinere sein. Ist dieselbe gleich μ, so können wir μ infinitesimale Transformationen erster Ordnung so auswählen, dafs in ihnen die Glieder ersten Grades von einander unabhängig sind. Dann kann man aber wieder erreichen, dafs in den weiteren infinitesimalen Transformationen, die man für die Bestimmung der Gruppe zu Grunde legt, alle Glieder der ersten Ordnung fehlen, dafs also alle anderen Transformationen in ihrer Entwicklung mit den höheren Potenzen der Variabeln beginnen. Ist jetzt

(6) $\Sigma\, b_{\iota\varkappa}^{\lambda} x_\iota x_\varkappa p_\lambda + \dots,$

wo λ eine blofse Marke ist und wo allgemein die Beziehung gilt:

$$(7) \quad b^{\lambda}_{\iota\varkappa} = b^{\lambda}_{\varkappa\iota},$$

eine Transformation zweiter Ordnung, bei deren Darstellung wir annehmen, dafs die fehlenden Glieder mindestens von der dritten Dimension sind, so darf man die Transformation (6) mit den drei Transformationen (3) kombinieren. Dadurch erhalten wir drei Transformationen erster Ordnung und zwar, indem man alle Koefficienten durch zwei dividiert, die folgenden:

$$\sum_{\varkappa,\lambda} b^{\lambda}_{1\varkappa} x_\varkappa p_\lambda + \ldots, \quad \sum_{\varkappa,\lambda} b^{\lambda}_{2\varkappa} x_\varkappa p_\lambda + \ldots, \quad \sum_{\varkappa,\lambda} b^{\lambda}_{3\varkappa} x_\varkappa p_\lambda + \ldots$$

Vorhin haben wir die Transformationen erster Ordnung in der Form $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta + \ldots$ geschrieben. In der ersten Transformation, die wir jetzt erhalten, wird der Koefficient $a_{\alpha\beta}$ durch $b^{\beta}_{1\alpha}$ vertreten, in der zweiten durch $b^{\beta}_{2\alpha}$, in der dritten durch $b^{\beta}_{3\alpha}$. Demnach mufs wegen der Gleichungen (4) und (7) für ungleiche Marken α, β, γ sein:

$$b^{\gamma}_{\alpha\beta} = - b^{\beta}_{\alpha\gamma} = - b^{\beta}_{\gamma\alpha} = b^{\alpha}_{\gamma\beta} = b^{\alpha}_{\beta\gamma}$$
$$= - b^{\gamma}_{\beta\alpha} = - b^{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

Wir sehen, dafs $b^{\gamma}_{\alpha\beta} = - b^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ ist.

Dagegen ist:

$$b^{\alpha}_{\alpha\alpha} = b^{\beta}_{\alpha\beta} = b^{\beta}_{\beta\alpha} = - b^{\alpha}_{\beta\beta}.$$

Setzt man $b^{\alpha}_{\alpha\alpha} = b_\alpha$, so kann man die Koefficienten in (6) durch die drei Koefficienten b_1, b_2, b_3 ausdrücken. Wir schreiben noch:

$$(8) \quad V_\alpha = 2x_\alpha \Sigma p_\varkappa x_\varkappa - p_\alpha \Sigma x^2_\varkappa + \ldots;$$

dann geht der Ausdruck (6) über in $\Sigma b_\nu V_\nu$. Setzt man allgemein $S_{\varkappa\iota} = - S_{\iota\varkappa}$, so kann man die Transformationen erster Ordnung, auf welche die Kombination dieser neuen Transformation mit P_1, P_2, P_3 gelangt, in der Gestalt schreiben:

$$\begin{array}{ll} & b_1 U - b_2 S_{12} - b_3 S_{13} \\ (9) & b_2 U - b_1 S_{21} - b_3 S_{23} \\ & b_3 U - b_1 S_{31} - b_2 S_{32}. \end{array}$$

Ebenso müssen bis auf infinitesimale Transformationen der dritten und höheren Ordnung die Beziehungen gelten:

(10) $(UV_\alpha) = V_\alpha$, $(S_{\alpha\beta}V_\alpha) = - V_\beta$, $(S_{\alpha\beta}V_\gamma) = 0$.

Nun wird sich aber sogleich zeigen, dafs weitere Transformationen nicht hinzutreten; die Gleichungen (10) sind also streng richtig.

6. Dafs keine infinitesimale Transformationen dritter Ordnung existieren, beweist Lie auf folgende Weise. Es seien in

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 homogene Funktionen dritten Grades in x_1, x_2, x_3, und die nicht niedergeschriebenen Glieder mögen die Variabeln nur in höheren Potenzen enthalten. Durch Kombination mit P_α ergiebt sich eine Transformation der zweiten Ordnung, die ebenfalls der Gruppe angehört. Demnach müssen die Funktionen ξ_1, ξ_2, ξ_3 für jede Marke α den Bedingungen genügen:

$$\sum_\varkappa \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_\alpha} p_\varkappa = \sum_\lambda c_{\alpha\lambda} \left[2x_\lambda \sum_\varkappa x_\varkappa p_\varkappa - p_\lambda \sum x_\varkappa{}^2 \right].$$

Differentiieren wir diese Gleichung nach x_β, so bekommen wir:

$$\sum \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 2 \sum c_{\alpha\lambda} (x_\lambda p_\beta - x_\beta p_\lambda) + 2c_{\alpha\beta} \sum x_\varkappa p_\varkappa.$$

Vertauschen wir hier α und β, die wir als verschieden annehmen, so darf sich die rechte Seite nicht ändern; also ergiebt sich

$$c_{\alpha\varkappa} = c_{\beta\varkappa} = 0 \text{ (für } \varkappa \lesseqgtr \alpha\beta) \text{ und } c_{\alpha\alpha} + c_{\beta\beta} = 0.$$

Es verschwinden hiernach alle Koefficienten c, da man für α und β irgend zwei Marken der Reihe 1, 2, 3 wählen darf und die drei Gleichungen $c_{\alpha\alpha} + c_{\beta\beta} = 0$ nur befriedigt werden, wenn die drei Gröfsen $c_{\alpha\alpha}$ verschwinden. Da nun die sämtlichen Differential-Quotienten der Funktionen ξ_1, ξ_2, ξ_3 identisch gleich null sind, gilt dasselbe für die Funktionen selbst wegen der bekannten Beziehung:

$$3\xi_\alpha = x_1 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_3}.$$

Ebensowenig können Transformationen einer höhern Ordnung vorkommen. Durch Kombination einer Transformation von

der Ordnung $\mu + 1$ mit den Transformationen P_α ergeben sich solche von der Ordnung μ. Sobald diese letzteren und damit die Ableitungen der ersteren identisch verschwinden, müssen die ersteren selbst identisch gleich null sein. Demnach kann in unserm Falle keine infinitesimale Transformation vorkommen, deren Ordnung gröfser als zwei ist.

7. Ehe wir weitergehen, müssen wir zwei einfache Bemerkungen vorausschicken. An erster Stelle weisen wir darauf hin, dafs eine infinitesimale Transformation von der höchsten Ordnung, die in der Gruppe vorkommt, durch ihre Anfangsglieder vollständig bestimmt ist, die von einer niedrigeren Ordnung aber nicht. Wenn z. B. in einer Gruppe keine Transformation von der Ordnung $\nu + 1$ enthalten ist, aber A_ν, B_ν ... von der ν^{ten}, $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$... von der $\nu - 1^{\text{ten}}$, $A_{\nu-2}$, $B_{\nu-2}$... von der $\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung sind, so müssen A_ν und B_ν identisch sein, falls sie in den Gliedern von der ν^{ten} Ordnung übereinstimmen, da sonst die Gruppe die Transformation $A_\nu - B_\nu$ enthielte, deren Ordnung $> \nu$ ist. Dagegen ist $A_{\nu-1} + aA_\nu + a'B_\nu + \ldots$ von der Ordnung $\nu - 1$ und besitzt dieselben Anfangsglieder wie $A_{\nu-1}$, wofern $a, a' \ldots$ beliebige Konstanten sind. Entsprechend ist $A_{\nu-2} + bA_{\nu-1} + b'B_{\nu-1} + \ldots + cA_\nu + c'B_\nu + \ldots$ von der Ordnung $\nu - 2$, wenn man für $b, b', \ldots c, c' \ldots$ beliebige Konstanten wählt. Diese Eigenschaft benutzt Lie, um die Transformationen von einer niedrigeren Ordnung so zu bestimmen, dafs für ihre Kombination möglichst einfache Gesetze gelten; er normiert, wie er sich ausdrückt, die Transformationen.

Zweitens sieht man sofort, dafs durch die Kombination $(A_\mu A_\nu)$ einer Transformation A_μ von der μ^{ten} mit einer Transformation A_ν von der ν^{ten} Ordnung sich eine Transformation von der Ordnung $\mu + \nu - 1$ ergiebt und dafs darin die Glieder der niedrigsten Ordnung, aber nur diese bekannt sind, falls man die Anfangsglieder von A_μ und A_ν kennt.

8. Wir gehen jetzt dazu über, aus den angegebenen Transformationen diejenigen auszuwählen, welche mit P_1, P_2, P_3 vereint in derselben Gruppe vorkommen können. Dabei betrachten wir zuerst den Fall, dafs die Gruppe mindestens zwei infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung enthält; es seien dies $\Sigma b_\nu V_\nu$ und $\Sigma b_\nu' V_\nu$. Jede dieser beiden führt auf drei Transformationen

erster Ordnung (10); welche auf mindestens zwei verschiedene hinauskommen. Da zudem die Transformationen

$$b_1 U - b_2 S_{12} - b_3 S_{13} \text{ und } b_1' U - b_2' S_{12} - b_3' S_{13}$$

nur identisch sein können, wenn die Verhältnisse $b_1 : b_2 : b_3 = b_1' : b_2 : b_3'$ gleich sind, so enthält die Gruppe vier Transformationen erster Ordnung, und als diese dürfen geradezu U, S_{23}, S_{31}, S_{12} gewählt werden. Nun führt die Kombination von S_{23} mit $\Sigma b_\nu V_\nu$ auf $b_3 V_2 - b_2 V_3$ und die Kombination dieser mit S_{31} auf $b_2 V_1$. Ist also b_2 von null verschieden, so kommt in der Gruppe die Transformation V_1 vor; diese mit S_{12} und S_{13} kombiniert liefert V_2 und V_3. Unter der gemachten Annahme enthält die Gruppe die zehn Transformationen:

$$P_\alpha,\ S_{\alpha\beta},\ U,\ V_\alpha \qquad \text{für } \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

9. Besitzt die Gruppe nur eine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung, so darf sie nicht die drei Transformationen S_{23}, S_{31}, S_{12} enthalten. Denn wir haben soeben gesehen, dafs die Kombination irgend einer Transformation $\Sigma b_\nu V_\nu$ mit diesen drei Transformationen erster Ordnung zu den drei Transformationen V_1, V_2, V_3 führt. Mit der Transformation $W = \Sigma b_\nu V_\nu$ sind aber jedenfalls die Transformationen (9) zu vereinigen; aus ihrer Kombination mit W erhalten wir aber die drei Transformationen zweiter Ordnung $2 b_\alpha W - V_\alpha \Sigma b_\varkappa^2$ für $\alpha = 1, 2, 3$. Diese sind unter einander und mit der Transformation W nur dann identisch, wenn $\Sigma b_\varkappa^2 = 0$ ist. Legen wir diese Bedingung zu Grunde, so kommen die drei Transformationen (9) auf zwei hinaus. Falls dann aufserdem b_1 von null verschieden ist, kann man die Transformationen (9) durch

$$S = b_1 U - b_2 S_{12} - b_3 S_{13} \text{ und } S' = b_1 S_{23} + b_2 S_{31} + b_3 S_{12}$$

ersetzen. Ist jetzt eine weitere infinitesimale Transformation erster Ordnung in der Gruppe enthalten, so kann man annehmen, dafs in ihrem Ausdruck U und S_{23} nicht vorkommen. Die Kombination von $c_2 S_{31} + c_3 S_{12}$ mit W führt aber, falls nicht c_2 und c_3 verschwinden, auf eine weitere Transformation zweiter Ordnung. Demnach enthält eine transitive Gruppe, wofern sie eine einzige, infinitesimale Transformation der zweiten Ordnung enthält, zwei Transformationen erster Ordnung; sie wird durch die Transformationen

$$W,\ S,\ S',\ P_1,\ P_2,\ P_3 \qquad \text{bestimmt.}$$

10. Wenn in der Gruppe keine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung vorkommt, so hat man zu beachten, dafs mit den Transformationen erster Ordnung $a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$ und $b_0 U + b_1 S_{23} + b_2 S_{31} + b_3 S_{12}$ die aus ihrer Kombination hervorgehende Transformation

$$(a_3 b_2 - a_2 b_3)\, S_{23} + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, S_{31} + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, S_{12}$$

verbunden werden mufs, die ebenfalls von der ersten Ordnung ist. Hiernach können wir die möglichen Fälle leicht übersehen. Aufser den Transformationen nullter Ordnung P_1, P_2, P_3 kommen in der Gruppe vor entweder

a) U, S_{23}, S_{31}, S_{12} oder

b) S_{23}, S_{31}, S_{12} oder

c) U, $a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$ und

$$(a_1^2 + \omega^2)\, S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega)\, S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega)\, S_{12},$$

wo $\omega^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ ist und wo a_2 und a_3 nicht beide verschwinden dürfen; oder

d) U, $a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$, oder

e) $a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_2 S_{12}$ und $(a_1^2 + \omega^2)\, S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega)\, S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega)\, S_{12}$ unter den bei c) angegebenen Bedingungen, oder

f) $a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$.

Die zuletzt angegebene Gruppe brauchen wir im folgenden nicht zu berücksichtigen.

11. Es ist jetzt unsere Aufgabe, den Bau der einzelnen Gruppen anzugeben, auf die uns die vorstehende Untersuchung geführt hat. Um hierbei die passendsten infinitesimalen Transformationen auszuwählen, müssen wir von den in 7. gemachten Bemerkungen Gebrauch machen. Die Herleitung wird am einfachsten, wenn die Gruppe die Transformation U enthält; wir wollen daher diese Fälle zuerst erledigen.

Für die in 10. unter a) angegebene Gruppe ist $(U S_{\alpha\beta}) = 0$, $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$. Nun ist offenbar für beliebige Konstanten $m_0 \ldots m_3$: $(P_\alpha + m_0 U + m_1 S_{23} + m_2 S_{31} + m_3 S_{12}, U) = (P_\alpha U)$. Ferner gilt die Beziehung: $(P_\alpha U) = P_\alpha + n_0 U + n_1 S_{23} + n_2 S_{31} + n_3 S_{12}$. Ersetzen wir also P_α durch die rechte Seite dieser Gleichung, so erhalten wir für das neue P_α die Relation: $(P_\alpha U) = P_\alpha$. Bei dieser Wahl von P_1, P_2, P_3 kann durch die Kombination mit U keine Transformation erster Ordnung erhalten werden.

Nun verlangt die Identität (P_α, P_β, U), dafs ist $(P_\alpha S_{\beta\gamma}) = ([P_\alpha S_{\beta\gamma}]U)$, und ebenso folgt aus der Identität (P_α, $S_{\alpha\beta}$, U) die Gleichung: $(P_\alpha S_{\alpha\beta}) = ([P_\alpha S_{\alpha\beta}]U)$. Wir sehen also, dafs auch die Ausdrücke für $(P_\alpha S_{\beta\gamma})$ und $(P_\alpha S_{\alpha\beta})$ keine Transformationen erster Ordnung enthalten; somit mufs sein:

$$(P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0, \quad (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta.$$

Die Identität (P_α, P_β, U) führt auf die Gleichung: $2(P_\alpha P_\beta) = ([P_\alpha P_\beta]U)$. Hieraus folgt zunächst wieder, dafs die linke Seite keine Transformationen erster Ordnung enthält; ist aber $(P_\alpha P_\beta) = c_{\alpha\beta} P_1 + c_{\alpha\beta}' P_2 + c_{\alpha\beta}'' P_3$, so verlangt diese Gleichung, dafs $2 c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \ldots$ ist; demnach ergiebt sich $(P_\alpha P_\beta) = 0$. Der Bau der Gruppe wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$(P_\alpha P_\beta) = 0, \quad (P_\alpha U) = P_\alpha, \quad (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta, \quad (P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0,$$
$$(US_{\alpha\beta}) = 0, \quad (S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma},$$

wo α, β, γ ungleiche Marken sind.

12. Genau so verfährt man, um den Bau der Gruppe 10, d) zu ermitteln. Setzt man $a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12} = S$, so ist offenbar $(U, S) = 0$. Auch kann man dadurch, dafs man P_α durch $P_\alpha + m_\alpha S + n_\alpha U$ ersetzt, erreichen, dafs $(P_\alpha U) = P_\alpha$ wird. Dann zeigt die Identität (P_α, S, U), aus der sich die Gleichung $(P_\alpha S) = ([P_\alpha S]U)$ ergiebt, in der früheren Weise, dafs $(P_\alpha S) = a_\gamma P_\beta - a_\beta P_\gamma$ ist, wo α, β, γ eine gerade Permutation der Marken 1, 2, 3 ist. Dafs aber $(P_\alpha P_\beta) = 0$ ist, folgt wieder aus der Relation $(P_\alpha P_\beta U)$. Wir finden somit die Beziehungen:

$$(P_\alpha P_\beta) = 0, \quad (P_\alpha U) = P_\alpha, \quad (P_\alpha S) = a_\gamma P_\beta - a_\beta P_\gamma, \quad (US) = 0.$$

13. Auf ähnliche Weise ermitteln wir die Struktur der in 8. angegebenen Gruppe, welche durch die zehn Transformationen P_α, U, $S_{\alpha\beta}$, V_α für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ bestimmt wird. Hier ist offenbar:

$$(V_\alpha V_\beta) = 0, \quad (UV_\alpha) = V_\alpha, \quad (S_{\alpha\beta} V_\beta) = V_\alpha, \quad (S_{\alpha\beta} V_\gamma) = 0.$$

Ferner ist $(US_{\alpha\beta}) = c_{\alpha\beta} V_1 + c_{\alpha\beta}' V_2 + c_{\alpha\beta}'' V_3$, oder wenn wir $S_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} V_1 - c_{\alpha\beta}' V_2 - c_{\alpha\beta}'' V_3$ als neues $S_{\alpha\beta}$ einführen: $(US_{\alpha\beta}) = 0$. Die Identität ($S_{\alpha\beta}$, $S_{\beta\gamma}$, U) geht hiernach über in $(U[S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}]) = 0$. Daraus ergiebt sich, dafs im Ausdrucke für $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma})$ die Transformationen V_1, V_2, V_3 nicht vorkommen; es mufs somit sein: $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$.

Angenommen, es sei

$$(P_1 U) = P_1 + a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12} + b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3,$$

so hat man P_1 durch $P_1 + a_0 U + a_1 S_{23} + a_3 S_{12} + \frac{1}{2}(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3)$ zu ersetzen, um zu erhalten: $(P_1 U) = P_1$. Auf dieselbe Weise erreicht man, dafs $(P_2 U) = P_2$, $(P_3 U) = P_3$ wird.

Die Identität $(P\alpha, S\varkappa\lambda, U)$ geht über in $(P\alpha\, S\varkappa\lambda) = ([P\alpha\, S\varkappa\lambda] U)$. Auf der rechten Seite kommen die Transformationen U, S_{23}, S_{31}, S_{12} gar nicht vor; die $V\mu$ erhalten auf beiden Seiten entgegengesetzte Vorzeichen; demnach ist

$$(P\alpha\, S\alpha\beta) = P\beta, \quad (P\alpha\, S\beta\gamma) = 0.$$

Aus der Relation: $(P\alpha, V\beta, U)$ ergiebt sich die Gleichung: $(U[P\alpha\, V\beta]) = 0$, und daraus folgt:

$$(P\alpha\, V\alpha) = 2U, \quad (P\alpha\, V\beta) = -2S\alpha\beta.$$

Endlich führt die Identität $(U, P\alpha, P\beta)$ in der früheren Weise auf die Gleichung: $(P\alpha\, P\beta) = 0$. Wir erhalten also die Beziehungen:

$$(P\alpha\, P\beta) = 0,\ (P\alpha\, U) = P\alpha,\ (P\alpha\, S\alpha\beta) = P\beta,\ (P\alpha\, S\beta\gamma) = 0,$$
$$(P\alpha\, V\alpha) = 2U,\ (P\alpha\, V\beta) = -2S\alpha\beta,\ (US\alpha\beta) = 0,$$
$$(S\alpha\beta S\beta\gamma) = S\alpha\gamma,\ (UV\alpha) = V\alpha,\ (S\alpha\beta V\beta) = V\alpha,\ (V\alpha\, V\beta) = 0.$$

14. In der Gruppe 10, c) setzen wir:

$$a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12} = S,$$
$$(a_1^2 + \omega^2) S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega) S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega) S_{12} = S'.$$

Alsdann ist: $(SS') = -\omega S'$, $(US) = 0$, $(US') = 0$. Auf dieselbe Weise wie vorhin erreichen wir, dafs $(P\alpha\, U) = P\alpha$ ist. Demnach kommt jetzt in keiner Kombination mit U eine Transformation erster Ordnung vor; es ergiebt sich also wieder $(P\alpha\, P\beta) = 0$. Um die Ausdrücke für $(P\alpha\, S)$ und $(P\alpha\, S')$, in denen wegen der Identitäten $(P\alpha\, SU)$ und $(P\alpha\, S'U)$ keine Transformationen erster Ordnung vorkommen, zu vereinfachen, setzen wir:

$$Q_1 = (a_1^2 + \omega^2) P_1 + (a_1 a_2 - a_3 \omega) P_2 + (a_1 a_3 + a_2 \omega) P_3$$
$$Q_2 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3$$
$$Q_3 = (a_1^2 + \omega^2) P_1 + (a_1 a_2 + a_3 \omega) P_2 + (a_1 a_3 - a_2 \omega) P_3.$$

Alsdann wird:

$$(Q\alpha\, Q\beta) = 0,\ (Q\alpha\, U) = Q\alpha,\ (Q_1 S) = -\omega Q_1,\ (Q_2 S) = 0,$$
$$(Q_3 S) = \omega Q_3,\ (Q_1 S') = -2\omega\,(a_1^2 + \omega^2)\, Q_2,\ (Q_2 S') = -\omega Q_3,$$
$$(Q_3 S') = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen den Bau der Gruppe.

15. Für die Gruppe 10, e) setzen wir:

$$S = a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12},$$
$$S' = (a_1^2 + \omega^2) S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega) S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega) S_{12}.$$

Zudem führen wir die Transformationen Q_1, Q_2, Q_3 wieder gerade so, wie in der vorigen Nummer, ein. Alsdann folgt:

$$(Q_1 S) = (a_0 - \omega) Q_1 + \ldots, \quad (Q_2 S) = a_0 Q_2 + \ldots,$$
$$(Q_3 S) = (a_0 + \omega) Q_3 + \ldots$$

Setzen wir: $a_0 - \omega = c_1$, $a_0 = c_2$, $a_0 + \omega = c_3$, wo die Beziehungen gelten: $\omega = \frac{c_3 - c_1}{2}$, $c_2 = \frac{c_3 + c_1}{2}$, so kann man, falls die Koefficienten c_α und $c_\alpha - \omega$ von null verschieden sind, leicht bewirken, dafs $(Q_\alpha S) = c_\alpha Q_\alpha$ wird. In diesem Falle führt die Identität (Q_α, S, S') auf die Gleichung:

$$(c_\alpha + \omega)\,(Q_\alpha S') = ([Q_\alpha S']S),$$

aus der sich ergiebt:

$$(Q_1 S') = e_1 Q_2, \quad (Q_2 S') = e_2 Q_3, \quad (Q_2 S') = 0,$$

wo $e_1 = - 2\omega\,(a_1^2 + \omega^2)$, $e_2 = - \omega$ ist. Die Identität $(Q_\alpha Q_\beta S)$ führt auf die Gleichung: $(c_\alpha + c_\beta)\,(Q_\alpha Q_\beta) = ([Q_\alpha Q_\beta]S)$; hieraus folgt, falls auch stets $c_\alpha + c_\beta - c_\gamma$ und $c_\alpha + c_\beta - \omega$ von null verschieden ist, dafs $(Q_\alpha Q_\beta) = 0$ wird.

Indem wir die Erledigung der ausgeschlossenen Fälle dem Leser überlassen, begnügen wir uns damit, die erhaltenen Beziehungen zusammenzustellen; es sind:

$$(Q_\alpha Q_\beta) = 0, \quad (Q_\alpha S) = c_\alpha Q_\alpha, \quad (Q_1 S') = e_1 Q_2, \quad (Q_2 S') = e_2 Q_3,$$
$$(Q_3 S') = 0, \quad (SS') = - \omega S'.$$

16. Die in 9. angegebene Gruppe wird durch die Transformationen erzeugt:

$$P_1, \; P_2, \; P_3, \; S = b_1 U - b_2 S_{12} - b_3 S_{13},$$
$$S' = b_1 S_{23} + b_2 S_{31} + b_3 S_{12}, \quad W = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3,$$

wo $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0$ und b_1 von null verschieden ist; wir setzen $b_1 = 1$.

Offenbar ist $(SW) = 2W$, $(S'W) = 0$; indem man die Transformation W mit einer geeigneten Konstanten multipliziert und zu S' hinzufügt, kann man bewirken, dafs $(SS') = S'$ wird.

Die Glieder erster Ordnung, welche in den Kombinationen $(P_1 W)$, $(P_2 W)$, $(P_3 W)$ vorkommen, sind bis auf den Faktor zwei durch (9) gegeben. Setzt man

$$b_1 P_1 - b_2 P_2 - b_3 P_3 = Q_1, \quad b_3 P_2 - b_2 P_3 = Q_2,$$
$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3 = Q_3,$$

und addiert man zu den Q_α die mit einem passenden Koefficienten versehene Transformation S, so folgt:

$$(Q_1 W) = 4S, \quad (Q_2 W) = 2S', \quad (Q_3 W) = 0.$$

Diese drei Gleichungen ändern sich nicht, wenn man zu den Q_α die Transformation S' und W mit beliebigen konstanten Koefficienten hinzufügt. Nun kann man Q_α durch

$$Q_\alpha + a_\alpha S' + b_\alpha W$$

ersetzen und die Konstanten a_α und b_α so wählen, dafs ist:

$$(Q_1 S) = 2Q_1 + \mu_1 S, \quad (Q_2 S) = Q_2 + \mu_2 S, \quad (Q_3 S) = \mu_3 S.$$

Dann lehren die Relationen (Q_α, S, W), dafs die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 gleich null sind. Hiernach folgt aus der Identität (Q_α, S', W), dafs im Ausdruck für $(Q_\alpha S')$ die Transformation S, und aus (Q_α, S, S'), dafs darin S' und W fehlen bis auf $(Q_3 S')$, welches gleich $\nu S'$ gesetzt werden kann.

Die Identitäten $(Q_\alpha Q_\beta S)$ liefern die Beziehungen:

$$(S[Q_1 Q_2]) + 3\,(Q_1 Q_2) = 0, \quad (S[Q_1 Q_3]) + 2\,(Q_1 Q_3) = 0,$$
$$(S[Q_2 Q_3]) + (Q_2 Q_3) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$(Q_1 Q_2) = 0, \quad (Q_1 Q_3) = \alpha Q_1, \quad (Q_2 Q_3) = \beta Q_2.$$

Hiernach verlangt die Identität $(Q_1 Q_2 S')$, dafs $\alpha = 0$ ist; $(Q_1 Q_3 S')$ führt auf die Gleichung: $\nu + \beta = 0$, und $(Q_2 Q_3 S')$ auf: $\nu - \beta = 0$. Die Transformationen Q_1, Q_2, Q_3 sind also mit einander vertauschbar.

Der Bau der sechsgliedrigen Gruppe wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$(Q_\alpha Q_\beta) = 0, \quad (Q_1 S) = 2Q_1, \quad (Q_2 S) = Q_2, \quad (Q_3 S) = 0,$$
$$(Q_1 S') = 2Q_2, \quad (Q_2 S') = Q_3, \quad (Q_3 S') = 0, \quad (Q_1 W) = 4S,$$
$$(Q_2 W) = 2S', \quad (b_3 W) = 0, \quad (SS') = S', \quad (SW) = 4W,$$
$$(S'W) = 0.$$

17. Es erübrigt nur noch, den Bau der Gruppe 10, b) anzugeben. Hier ist offenbar: $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$. Indem man die Transformationen S_{31} und S_{12} mit geeigneten Konstanten multipliziert und zu P_1 addiert, kann man bewirken, dafs $(P_1 S_{23}) = cS_{23}$ wird. Nachdem P_1 in dieser Weise bestimmt ist, führen die Gleichungen $(P_1 S_{13}) = P_3$ und $(P_1 S_{12}) = P_2$ auf feste Werte von P_2 und P_3.

Jetzt folgt aus (P_1, S_{12}, S_{13}) die Beziehung: $(P_2S_{23}) = P_3 + cS_{31}$, und aus $(P_1, S_{13}S_{23})$ ebenso: $(P_3S_{23}) = -P_2 + cS_{12}$.

Im Ausdruck für (P_2S_{12}) sind die Koefficienten von S_{23}, S_{31}, S_{12} unbekannt; setzt man:

$$(P_2S_{12}) = -P_1 + g_1S_{23} + g_2S_{31} + g_3S_{12},$$

so erhält man aus den Identitäten $(P_1S_{12}S_{13})$ und $(P_2S_{23}S_{12})$ die Gleichungen:

$$(P_2S_{31}) + (P_3S_{12}) = cS_{23}$$

$$(P_2S_{31}) - (P_3S_{12}) = -g_2S_{12} + g_3S_{31},$$

und daraus ergiebt sich:

$$(P_2S_{31}) = \tfrac{1}{2}cS_{23} + \tfrac{1}{2}g_3S_{31} - \tfrac{1}{2}g_2S_{12}$$

$$(P_3S_{12}) = \tfrac{1}{2}cS_{23} - \tfrac{1}{2}g_3S_{31} + \tfrac{1}{2}g_2S_{12}.$$

Indem wir diese Werte benutzen, führt die Identität $(P_3S_{23}S_{12})$ auf die Gleichung:

$$(P_3S_{31}) = P_1 - g_1S_{23} - \tfrac{1}{2}g_2S_{31} - \tfrac{1}{2}g_3S_{12}.$$

Hiernach verlangt die Relation $(P_3S_{12}S_{31})$, dafs $c = g_1 = 0$, und die Relation $(P_3S_{23}S_{31})$, dafs $g_2 = g_3 = 0$ ist. Wir finden also allgemein:

$$(11) \quad (P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0, \; (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta.$$

Diese Gleichungen sind aus den Voraussetzungen

$$(P_1S_{23}) = cS_{23}, \; (P_1S_{12}) = P_2, \; (P_1S_{13}) = P_3$$

unter blofser Benutzung der Identitäten $(P_\alpha S_{\alpha\lambda}S_{\lambda\mu})$ hergeleitet. Die erste der drei vorausgesetzten Gleichungen bleibt aber ungeändert, wenn man P_1 durch $P_1 + \mu S_{23}$ ersetzt; sollen hierbei auch die beiden anderen Gleichungen, die wir zu Grunde gelegt haben, keine Änderung erleiden, so mufs man zugleich P_2 durch $P_2 + \mu S_{31}$ und P_3 durch $P_3 + \mu S_{12}$ ersetzen. Demnach bleiben die Gleichungen (11) auch für die neuen Transformationen P_α richtig. Nun folgt aus der Identität $(P_1P_2S_{12})$, dafs $([P_1P_2]S_{12}) = 0$ oder dafs $(P_1P_2) = aP_3 + bS_{12}$ ist. Demnach wird:

$$(P_1 + \mu S_{23}, P_2 + \mu S_{31}) = aP_3 + bS_{12} - 2\mu P_3 - \mu^2 S_{12}.$$

Setzt man $2\mu = a$ und führt eine neue Konstante k ein, so gilt bei geeigneter Wahl von P_1, P_2, P_3 die Beziehung:

$$(P_1P_2) = -kS_{12}.$$

Hiernach verlangen die Identitäten (P_1, P_2, S_{23}) und (P_1, P_2, S_{31}), dafs ist: $(P_3P_1) = -kS_{31}$, $(P_2P_3) = -kS_{12}$.

Zu den Gleichungen (11) kommen also hinzu:

$$(12) \quad (P_\alpha P_\beta) = -kS_{\alpha\beta}.$$

18. Nachdem wir durch die vorangehende Untersuchung den Bau aller Gruppen gefunden haben, welche den aufgestellten Forderungen genügen, erübrigt nur noch, die Komponenten ihrer infinitesimalen Transformationen zu ermitteln. Bei der Lösung dieser Aufgabe mufs es uns darauf ankommen, die Variabeln so zu wählen, dafs die Ausdrücke für die Komponenten möglichst einfach werden. Um dies Ziel zu erreichen, können wir, abgesehen von der zuletzt gefundenen Gruppe, ein einheitliches Verfahren zu Grunde legen, das wir in aller Kürze darlegen wollen.

Wir denken uns die drei aus P_1, P_2, P_3 hervorgehenden eingliedrigen Gruppen bei beliebiger Wahl der Variabeln in endlicher Form dargestellt; es seien dies der Reihe nach die Gruppen

$$y_\varkappa' = \varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3; t_1)$$
$$y_\varkappa' = \psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3; t_2)$$
$$y_\varkappa = \chi_\varkappa(y_1, y_2, y_3; t_3),$$

wo wir den Parameter jedesmal so gewählt denken, dafs bei seinem Verschwinden die identische Transformation erhalten wird. Auch soll die Vereinigung der zu t_λ und zu t_λ' gehörenden Transformationen zu derjenigen Transformation führen, welche den Parameter $t_\lambda + t_\lambda'$ hat. Dabei wollen wir nur annehmen, dafs der in der ganzen Untersuchung bevorzugte Nullpunkt auch wieder durch das Wertsystem (0, 0, 0) dargestellt wird. Nennen wir die Linie, in der ein Punkt durch die Transformationen einer eingliedrigen Gruppe bewegt wird, seine Bahnlinie, so können wir sagen, dafs jede Bahnlinie durch die eingliedrige Gruppe in sich verschoben wird. Da aber der Annahme nach die aus P_1, P_2, P_3 hervorgehenden endlichen Transformationen den Nullpunkt in jeden Punkt seiner Umgebung überführen, so können in der Umgebung dieses Punktes niemals zwei Bahnlinien zusammenfallen, welche von irgend zwei verschiedenen unter den angegebenen drei eingliedrigen Gruppen erzeugt werden.

Um die neuen Koordinaten zu erhalten, legen wir dem Nullpunkt wieder das Wertsystem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bei und betrachten diejenige Linie, in der dieser Punkt bei der aus P_3 hervorgehenden eingliedrigen Gruppe $y_\varkappa' = \chi_\varkappa(y_1, y_2, y_3; t_3)$ bewegt wird. Für alle Punkte dieser Linie soll $x_1 = x_2 = 0$ sein, während die dritte Variabele x_3 den Wert t_3 für denjenigen Punkt

erhalten soll, in den der Nullpunkt durch die zum Parameter t_3 gehörende Transformation übergeführt wird.

Jetzt betrachten wir die aus P_2 hervorgehende eingliedrige Gruppe: $y_\varkappa' = \psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3; t_2)$. Da diese den Punkt $(0, 0, x_3)$ in einer Linie bewegt, welche von der Linie $x_1 = x_2 = 0$ verschieden ist, so erlangt dieser Punkt durch die zum Parameter t_2 gehörende Transformation für einen von null verschiedenen Wert von t_2 eine Lage, welche der Linie $x_1 = x_2 = 0$ nicht angehört. Wir setzen fest, dafs für die neue Lage sich der Wert von x_3 nicht ändert, dafs aber $x_2 = t_2$, $x_1 = 0$ wird. Indem wir diese Festsetzung für alle Wertsysteme treffen, die dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Gröfse bleiben, können wir allen Punkten der Fläche $x_1 = 0$, die in der Umgebung des Nullpunktes liegen, auf eindeutige Weise Wertsysteme (x_2, x_3) zuordnen.

Endlich gehen wir zu der durch P_1 erzeugten Gruppe: $y_\varkappa = \varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3; t_1)$ über. Für einen von null verschiedenen Wert von t_1 wird der Punkt, in den der Punkt $(0, x_2, x_3)$ übergeht, der Fläche $x_1 = 0$ nicht angehören. Wir setzen fest, dafs für die neue Lage die Variabeln x_2 und x_3 ihren Wert nicht ändern, dafs dagegen $x_1 = t_1$ werde.

Hierdurch ist jedem Punkte in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes ein bestimmtes Wertsystem (x_1, x_2, x_3) zugeordnet. In diesen Variabeln wird allgemein $P_1 = p_1$, dagegen $P_2 = p_2$ für $x_1 = 0$ und $P_3 = p_3$ für $x_1 = x_2 = 0$.

19. Diese Wahl der Veränderlichen empfiehlt sich besonders, wenn die Transformationen P_1, P_2, P_3 mit einander vertauschbar sind. Dann verlangen wegen des angegebenen Wertes von P_1 die Beziehungen $(P_1P_2) = 0$ und $(P_1P_3) = 0$, dafs P_2 und P_3 von x_1 unabhängig sind. Es mufs also auch $P_2 = p_2$ und demnach infolge der Gleichung $(P_2P_3) = 0$ auch $P_3 = p_3$ sein. Die weiteren infinitesimalen Transformationen lassen sich aus den Ausdrücken für $(P_\alpha X)$ unter Berücksichtigung ihrer Ordnung leicht ermitteln; bei den in den Nummern 11, 12, 13 behandelten Gruppen erhält man den vollständigen Ausdruck, indem man sich auf die Glieder der niedrigsten Dimension beschränkt, und da diese oben bereits angegeben sind, kann man die Formen unmittelbar niederschreiben. Auch die Ermittlung der Invariante

macht keine Schwierigkeit; da sie eine blofse Funktion aus den Differenzen $x_1 - x_1'$, $x_2 - x_2'$, $x_3 - x_3'$ wird, setzen wir für $\alpha = 1, 2, 3$ jedesmal $x_\alpha - x_\alpha' = u_\alpha$.

Für die in 11. behandelte Gruppe wird

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \quad S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha;$$

sie hat keine Invariante zwischen zwei Wertsystemen.

Die Gruppe in 12. wird durch die Transformationen bestimmt:

$$p_1, p_2, p_3, x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3,$$
$$a_1 (x_2 p_3 - x_3 p_2) + a_2 (x_3 p_1 - x_1 p_3) + a_3 (x_1 p_2 - x_2 p_1);$$

ihre Invariante ist:

$$\frac{(a_2 u_3 - a_3 u_2)^2 + (a_3 u_1 - a_1 u_3)^2 + (a_1 u_2 - a_2 u_1)^2}{(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)^2}.$$

Für die zehngliedrige Gruppe, die wir in 13. angegeben haben, wird

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \quad S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha,$$
$$V_\alpha = 2 x_\alpha \Sigma p_\varkappa x_\varkappa - p_\alpha \Sigma x_\varkappa^2;$$

auch in ihr besteht zwischen zwei Wertsystemen keine Invariante.

Noch möge bemerkt werden, dafs bei einem verschwindenden Werte von k für die in 17. mitgeteilte Gruppe $P_\alpha = p_\alpha$, $S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ wird, und dafs die Invariante alsdann gleich ist $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

20. Bei den drei in den Nummern 14, 15, 16 behandelten Gruppen haben wir Q_1, Q_2, Q_3 als die Transformationen nullter Ordnung zu Grunde gelegt. Da diese vertauschbar sind, dürfen wir wieder $Q_\alpha = p_\alpha$ setzen. Dann wird für die erste dieser Gruppen, wenn man $\omega = -1$ setzt und die weitere darin vorkommende Konstante a nennt:

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \quad S = x_1 p_1 - x_3 p_3,$$
$$S' = a x_1 p_2 + x_2 p_3;$$

auch hier giebt es keine invariante Beziehung zwischen zwei Wertsystemen.

Die zweite Gruppe wird durch die Transformationen erzeugt:

$$p_1, p_2, p_3, c_1 x_1 p_1 + c_2 x_2 p_2 + c_3 x_3 p_3, e_1 x_1 p_2 + e_2 x_2 p_3,$$

wo wieder $2c_2 = c_1 + c_3$, $2e_2 = c_3 - c_1$ ist; die Invariante kann durch eine leichte Umänderung in die Form gebracht werden:

$$u_1^\lambda (u_2^2 + 2 u_1 u_3).$$

Die in 16. behandelte Gruppe hat die folgenden sechs von einander unabhängigen Transformationen:

$$p_1, p_2, p_3, 2x_1p_1 + x_2p_2, 2x_1p_2 + x_2p_3,$$
$$4x_1{}^2p_1 + 4x_1x_2p_2 + x_2{}^2p_3,$$

und die Invariante:

$$\frac{4u_1u_3 - u_2{}^2}{u_1}.$$

21. Weit schwieriger ist es, die infinitesimalen Transformationen der in 17. aufgestellten Gruppe für einen von null verschiedenen Wert von k zu ermitteln. Am einfachsten wird die Herleitung, wenn man einen allgemeinen Satz Lies benutzt, nach welchem alle Gruppen von der angegebenen Struktur ähnlich sind. Wenn wir diesen Satz als richtig voraussetzen, giebt es nach Wahl der Variabeln nur eine einzige Gruppe, die in der mitgeteilten Weise gebaut ist. Um aber die Variabeln so auszuwählen, dafs die Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen einfach und symmetrisch werden, können wir folgende Erwägung anstellen.

Die zehn Transformationen $p_\varkappa$, $x_\varkappa p_\lambda - x_\lambda p_\varkappa$ für $\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, 3$ bestimmen diejenige Gruppe in vier Variabeln, welche der starren Bewegung eines euklidischen vierdimensionalen Raumes entspricht. Beschränken wir uns auf die Gruppe, welche durch die sechs letzten Transformationen erzeugt wird, so erhalten wir nur diejenigen Bewegungen, bei denen der Anfangspunkt in Ruhe verbleibt. Dabei wird jedes dreidimensionale Gebilde in sich verschoben, welches bei beliebigem Werte von a der Gleichung genügt:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2.$$

Jetzt betrachten wir nur die Bewegung eines solchen Gebildes in sich. Die einzelnen Punkte desselben sind, falls wir uns auf einen gewissen Bereich beschränken, durch die Variabeln x_1, x_2, x_3 eindeutig bestimmt; wir können aber auch allgemein x_0 durch die Gleichung: $x_0 = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ eindeutig gegeben denken, wofern wir stetigen Änderungen von x_1, x_2, x_3 auch stetige Änderungen von x_0 entsprechen lassen. Jetzt dürfen wir für die Änderungen von x_1, x_2, x_3 die sechs Transformationen zu Grunde legen:

$$p_1x_0, p_2x_0, p_3x_0, x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_1p_2 - x_2p_1.$$

Hier sind die drei ersten Transformationen von der nullten, die drei letzten von der ersten Ordnung. Soll in den ersten die Entwicklung der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3 beginnen, so mufs $a = 1$ sein und dem Wurzelzeichen für kleine Werte von x_1, x_2, x_3 sein positiver Wert beigelegt werden. Setzen wir unter dieser Annahme

$$(13) \quad P_\alpha = p_\alpha x_0, \; S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha,$$

so wird $(P_\alpha P_\beta) = - S_{\alpha\beta}$, $(P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta$, $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$.

Das sind aber für $k = 1$ dieselben Beziehungen, die wir in Nr. 17 angegeben haben.

Demnach liegt es nahe, für einen beliebigen Wert von k die Formen (13) beizubehalten, jedoch

$$(14) \quad x_0 = \sqrt{1 - k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

zu setzen. Dann wird aber die vorangehende Darlegung ganz überflüssig, da man sofort sieht, dafs bei dieser Festsetzung die Gleichungen (11) und (12) gelten.

Indessen müssen wir wünschen, uns ohne die Voraussetzung des angeführten Lieschen Satzes davon überzeugen zu können, dafs dem angegebenen Bau nur eine einzige Gruppe genügt. Das können wir, wenn wir eine umfangreiche Rechnung nicht scheuen, auf folgendem Wege erreichen.

Wir legen für P_1, P_2, P_3 die in 18. angegebene Form zu Grunde, drücken also P_2 und P_3 vermittelst unbekannter Funktionen aus, die nur den dort geforderten Bedingungen genügen. Dann lassen sich wegen der Beziehungen $(P_\alpha P_\beta) = - kS_{\alpha\beta}$ auch die Transformationen $S_{\alpha\beta}$ vermittelst dieser Funktionen darstellen. Nun leite man aus den Gleichungen für $(P_\alpha S_{\varkappa\lambda})$ Differentialgleichungen her, denen die unbekannten Funktionen genügen müssen. Unter Berücksichtigung derjenigen Ausdrücke, in welche P_2 für $x_1 = 0$ und P_3 für $x_1 = x_2 = 0$ übergeht, finden wir eine einzie Lösung. Nachdem wir uns durch diese Rechnung überzeugt haben, dafs alle Gruppen, die auf diese Weise gebaut sind, durch Einführung neuer Variabeln in einander übergeführt werden können, dürfen wir ohne Beweis von der durch die Gleichungen (13) und (14) bestimmten Form ausgehen, da diese offenbar den gestellten Bedingungen genügt.

Hiermit können wir unsere analytischen Entwicklungen beendigen; die dargelegten Sätze genügen für die Anwendungen, welche wir im folgenden von der Theorie der Transformations-Gruppen machen wollen.

§ 7.

Zusammenhang zwischen den allgemeinen Raumformen und den Transformations-Gruppen.

1. Wir haben bereits im vorigen Abschnitt darauf hingewiesen, dafs es grofse Schwierigkeit bietet, die Folgerungen aus den dort (VII § 11 S. 237) angegebenen Grundsätzen auch nur so weit zu verfolgen, dafs wir einen Überblick über alle verschiedenen Raumformen gewinnen. Dagegen wird uns die Untersuchung wesentlich erleichtert, wenn wir die Analysis für die Theorie der Raumformen nutzbar machen können. Wir können daher versucht sein, rein axiomatisch vorauszusetzen, dafs es gestattet ist, allen Punkten eines n-dimensionalen Raumes eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Zahlgröfsen zuzuordnen und die verschiedenen Lagen desselben Körpers durch analytische Formeln darzustellen.[27]) Da bei diesem Verfahren unsere Grundsätze in Kraft bleiben, so sind wir sicher, dafs alle Möglichkeiten, zu denen wir alsdann auf analytischem Wege gelangen, unsern Grundsätzen genügen. Wir erhalten also eine Reihe von allgemeinen Raumformen und gewinnen dadurch einen tiefern Einblick in die Theorie, als die blofse Weiterführung der am Ende des vorigen Abschnitts begonnenen Untersuchung gestattet. Die analytische Darstellung eröffnet uns nämlich mit Leichtigkeit ein sehr weites Gebiet, dessen einzelne Systeme im uneigentlichen Sinne als Raumformen zu bezeichnen sind. Nachdem wir aber den allgemeinen Begriff der Raumformen aufgestellt haben, mufs es unsere erste Aufgabe sein, ihn durch zahlreiche Beispiele zu erläutern, und die Lösung dieser Aufgabe wird uns durch die Anwendung der Analysis überaus leicht gemacht.

2. Immerhin ist es nicht ohne Interesse, die Frage beantworten zu können, ob es Raumformen giebt, die sich der analytischen Behandlung ganz entziehen. Diese Frage mufs verneint werden, sobald es gelingt, in aller Strenge von unseren Grundsätzen aus zu einer analytischen Darstellung zu gelangen. Leider

ist dazu augenblicklich wenig Aussicht vorhanden. Wir müssen uns also damit begnügen, zu unseren Grundsätzen einige weitere Annahmen hinzuzufügen, welche sich ihrem Charakter nach ihnen anschliefsen und mit deren Hilfe es möglich wird, den n-dimensionalen Raum mit einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Zusammenhang zu bringen. Wir wollen im folgenden versuchen, diese Aufgabe zu lösen.[28]) Freilich müssen wir es uns versagen, den Weg in voller Ausführlichkeit darzulegen, da wir einerseits den Umfang unseres Werkes nicht übermäfsig vergröfsern dürfen, andererseits zu befürchten steht, das Interesse an dieser Frage sei nicht so grofs, dafs viele Leser eine eingehende Darlegung in allen Einzelheiten verfolgen würden. Immerhin hoffen wir, dafs es uns gelingt, die wichtigsten Punkte hervortreten zu lassen.

3. Wir benutzen einen beliebigen Körper k und denken uns in seinem Innern einen Punkt π bestimmt. Dem Raumpunkt, welchen der Punkt π in der Anfangslage A_0 des Körpers deckt, ordnen wir das Wertsystem (0, 0 . . . 0) zu, setzen also fest, dafs für ihn alle Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$ verschwinden. Jetzt betrachten wir eine zweite Lage A_1 des Körpers k, welche folgenden Forderungen genügt: a) der vom Punkte π in der zweiten Lage gedeckte Ort soll von seiner Anfangslage verschieden sein; b) die zweite Lage dieses Punktes soll innerhalb des Raumes liegen, den der Körper in der Anfangslage einnimmt. (Dafs die zweite Forderung nicht wesentlich ist, da es gestattet ist, den Körper k durch einen anderen Körper zu ersetzen, brauchen wir nicht zu erwähnen.) Dann ist es möglich, um den Punkt π einen Teil k_1 des Körpers k derart abzugrenzen, dafs er auch in der Lage A_1 einen Raumteil deckt, den ein anderer Teil k_2 von k in der Anfangslage einnimmt. Die von den kongruenten Körperteilen k_1 und k_2 in der Anfangslage A_0 eingenommenen Raumteile nennen wir B_0 und B_1. Bringt man jetzt, der Lage A_1 entsprechend, den Körperteil k_1 in die Deckung mit B_1, wobei wir, wie auch stets im folgenden, den im Anschlufs an den siebenten Grundsatz entwickelten strengen Begriff der Kongruenz festhalten, so giebt es einen ganz bestimmten Raumteil B_2, welcher alsdann von k_2 eingenommen wird. Wiederum kann man k_1 in die Lage B_2 bringen und dadurch unter Benutzung des Teiles k_2 einen Raumteil B_3 eindeutig bestimmen. In dieser Weise ist es

gestattet, fortzufahren und jeder beliebigen ganzen positiven Zahl ν einen bestimmten mit B_0 kongruenten Raumteil B_ν zuzuordnen. Umgekehrt kann man auch den Körperteil k_2 in die Lage B_0 bringen; dabei wird k_1 eine Lage B_{-1} erhalten. Da man mit dem neuen Raumteil auch wieder k_2 zur Deckung bringen kann, ist eine Methode gewonnen, welche jeder negativen ganzen Zahl ν eine feste Lage B_ν zuordnet. Deckt der Körper k_1 einen Raumteil B_ν, so nimmt der Punkt π einen bestimmten Ort ein, und für diesen soll die Variabele x_1 den Wert ν erhalten, während alle anderen Variabeln $x_2 \ldots x_n$ den Wert null beibehalten.

4. Die Möglichkeit, auch den Zahlen, deren Nenner gleich zwei ist, bestimmte Punkte zuzuordnen, würde sich unmittelbar ergeben, wenn man unter Beibehaltung der soeben benutzten Raumteile B_0 und B_1 folgenden Satz beweisen könnte:

»Es giebt im Körper k einen, und zwar einen einzigen, mit k_1 kongruenten Teil k', der zugleich in die Lage B_1 gelangt, wenn k_1 in die Anfangslage $B_{\frac{1}{2}}$ des Teiles k' gebracht wird.«

Man kann diesem Satze auch folgenden Ausspruch geben:

»Sind A und B irgend zwei Lagen desselben Körpers, so giebt es eine einzige dritte Lage C dieses Körpers von der Eigenschaft, dafs ein mit dem Körper fest verbundener zweiter Körper, der in der ersten Lage des ersten Körpers den Raum C deckt, die Lage B erhält, sobald der erste Körper in die Lage C gebracht wird.«

Bisher ist es freilich nicht möglich gewesen, diesen Satz in voller Strenge zu beweisen; gewisse Betrachtungen, auf die wir hier nicht eingehen möchten, lassen es aber nicht als unmöglich erscheinen, dafs er sich aus unseren Grundsätzen herleiten läfst. Setzen wir seine Richtigkeit voraus, so ergiebt sich nicht nur auf demselben Wege, der uns vorhin gestattete, jeder ganzen Zahl ν eine feste Lage B_ν zuzuordnen, die Möglichkeit, dasselbe für alle Zahlen durchzuführen, deren Nenner gleich zwei ist, sondern wir können auch bei Wiederholung desselben Prozesses, die uns auf die Lagen $B_{\frac{1}{4}}$, $B_{\frac{1}{8}} \ldots$ führt, für die Variabele x_1 zu allen Zahlen gelangen, deren Nenner eine beliebige Potenz von zwei ist. Indessen bleiben wir auch jetzt noch immer bei diskreten Punkten;

wollen wir zu den Punkten einer Linie gelangen, so müssen wir etwa folgenden Satz voraussetzen:

»Wie wir auch immer vom Körper k Teile l, l' . . . abgetrennt haben, läfst sich durch Wiederholung des Prozesses, der uns von den Lagen B_0 und B_1 zu einem Raumteil $B_{\frac{1}{2}}$ geführt hat, eine Lage $B_{\frac{1}{2^m}}$ bestimmen, in welcher jeder der Teile l, l' . . . in teilweiser Deckung mit seiner Anfangslage ist.«

Ein solcher Satz würde bereits das Archimedische Princip als richtig voraussetzen. Mit seiner Hilfe fällt es nicht schwer, auch den irrationalen Werten von x_1 bestimmte Punkte zuzuweisen und zu zeigen, dafs sie eine stetige Mannigfaltigkeit bilden. Die Benutzung der im zweiten Paragraphen des dritten Abschnittes (B. 1. S. 168—172) dargelegten allgemeinen Gesetze ermöglicht es uns aber, zu beweisen, dafs die Punkte einer Linie angehören, und dafs der Prozefs nicht auf ein mehrfach ausgedehntes Gebilde, etwa eine Fläche, führt.

5. Nachdem es auf dem angedeuteten oder irgend einem anderen Wege möglich geworden ist, eine Linie zu finden, für welche die Variabeln $x_2, x_3 \ldots x_n$ einen verschwindenden Wert annehmen, und die einzelnen Punkte der Linie durch die Werte der Variabeln x_1 zu bestimmen, macht es kaum noch Schwierigkeit, allen in der Umgebung des Nullpunktes gelegenen Punkten Wertsysteme zuzuordnen.

Um jetzt allen Punkten einer (endlichen) Fläche in ähnlicher Weise Wertsysteme zuzuordnen, braucht man nur eine weitere Lage C_1 des Körpers k in Betracht zu ziehen, bei der der Punkt π nicht in die Linie $(x_2 \ldots = x_n = 0)$ hineinfällt. Diese neue Lage in Verbindung mit der Anfangslage A_0 gestattet wieder auf eindeutige Weise, jeder beliebigen Zahl ν eine bestimmte Lage C_ν zuzuordnen. Es ist nun nachzuweisen, dafs, solange man von der Linie $(x_2 = \ldots = x_n = 0)$ ein Stück abgrenzt, das in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes liegt, und zugleich den absoluten Betrag der Zahl ν hinreichend klein bleiben läfst, die Punkte des abgegrenzten Linienstückes in keiner Lage C_ν, welche einer von null verschiedenen Zahl ν entspricht, in die Linie $(x_2 = \ldots = x_n = 0)$ zu liegen kommen; mit anderen Worten:

bei geeigneter Beschränkung der Bereiche für x_1' und ν kann man erreichen, dafs derjenige Punkt des bewegten Körpers, welcher in der Anfangslage den Raumpunkt $(x_1', 0 \ldots 0)$ deckt, bei der Lage C_ν nur für $\nu = 0$ in die genannte Linie hineinfällt. Wir dürfen daher dem von diesem Punkte in der Lage C_ν gedeckten Orte das Wertsystem $(x_1 = x_1', x_2 = \nu, x_3 = \ldots = x_n = 0)$ zuordnen. Die Gesamtheit der auf diesem Wege erhaltenen Punkte bildet, wie sich ohne Schwierigkeit beweisen lassen dürfte, eine Fläche, aber kein drei- oder mehrfach ausgedehntes Raumgebilde.

Wie man auf diesem Wege weiter fortschreitet, bedarf wohl keiner Darlegung; wir erkennen, dafs es möglich ist, allen Punkten, die in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes liegen, die Wertsysteme einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$ zuzuweisen.

6. Nachdem wir jedem Punkte, der in einem gewissen Bereiche liegt, ein bestimmtes Wertsystem oder, wie wir lieber sagen, n Koordinatenwerte zugeordnet haben, betrachten wir wieder zwei Lagen desselben festen Körpers. Derjenige Punkt desselben, welcher in der ersten Lage den Raumpunkt $(x_1 \ldots x_n)$ deckt, möge in der zweiten Lage mit dem Raumpunkt $(y_1 \ldots y_n)$ zusammenfallen. Indem wir hiernach dem Punkte (x) den Punkt (y) entsprechen lassen, ist eine Beziehung aller Punkte, die der Körper in der ersten Lage deckt, zu denjenigen Punkten festgesetzt, welche der Körper in der zweiten Lage einnimmt; die Punkte (x) sind in die Punkte (y) transformiert. Solange wir die Wertsysteme (x) nur auf solche Punkte beschränken, welche dem Körper in seiner ersten Lage angehören, kann jedem einzelnen Wertsystem (x) nur ein einziges Wertsystem (y) entsprechen; die Transformation ist eindeutig. Trennen wir vom Körper einen beliebigen Teil ab und beschränken uns auf solche Punkte (x), welche diesem Teile in der ersten Lage des Körpers angehören, so müssen die entsprechenden Punkte (y) demselben Teile in seiner zweiten Lage angehören. Jeder kontinuierlichen Mannigfaltigkeit (x) entspricht also eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit (y); der Transformation mufs die Stetigkeit beigelegt werden. Wir nehmen jetzt noch an, dafs die Transformation auch auf analytischem Wege darstellbar sei, dafs wir somit setzen dürfen:

$$y_\varkappa = f_\varkappa(x_1 \ldots x_n) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

7. Wir können aber auch die stetige Folge von Lagenveränderungen ins Auge fassen, welche bei einer Bewegung vor sich geht. Um diese analytisch darzustellen, können wir jeder einzelnen Lage eine gewisse Zahl zuordnen und festsetzen, dafs jedesmal der späteren Lage eine gröfsere Zahl entspricht. Dasselbe kann erreicht werden, wenn es gelingt, die Zeit durch eine einfach unendliche Zahlenmannigfaltigkeit darzustellen. Man thut aber besser, die in 4. durchgeführte Untersuchung für unsern Zweck nutzbar zu machen; statt eine beliebige Bewegung eines Körpers zu betrachten, leiten wir aus zwei Lagen eine einfach unendliche Folge von Lagen in der Weise her, dafs jede einzelne unter ihnen durch eine Zahl bestimmt ist, und dafs die Folge der Zahlen und die der Lagen einander eindeutig entsprechen. Will man aber die Beziehung der in der Lage u gedeckten Koordinaten (y) zu den Anfangskoordinaten (x) analytisch darstellen, so mufs man die Funktionen nicht blofs von $x_1 \ldots x_n$, sondern auch von der neuen Variabeln u abhangen lassen; wir setzen daher:

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa (x_1 \ldots x_n; u) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

Entspricht dem Werte $u = 0$ die Anfangslage, so mufs für $u = 0$ auch $y_1 = x_1 \ldots y_n = x_n$ sein; oder es ist:

$$\psi_\varkappa (x_1 \ldots x_n; 0) = x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

8. In ähnlicher Weise kann man alle verschiedenen Lagen in Betracht ziehen, welche der zu Grunde gelegte feste Körper annehmen kann. Alle diese Lagen mögen von einer gewissen Zahl r von veränderlichen Gröfsen $u_1 \ldots u_r$ abhängig gemacht sein. Dafs diese Zahl auch unendlich grofs sein kann, soll hier nicht weiter betrachtet werden; wir dürfen es dem Leser überlassen, sich von den Änderungen, welche an den folgenden Darlegungen für einen unendlich grofsen Wert von r nötig werden, selbst Rechenschaft zu geben. Was die Wahl der Gröfsen $u_1 \ldots u_r$, der Parameter, anbetrifft, so müssen wir voraussetzen, dafs jeder stetigen Folge von verschiedenen Lagen desselben Körpers auch eine stetige Mannigfaltigkeit von Wertsystemen $(u_1 \ldots u_r)$ entspricht. Um zu einer speciellen Wahl dieser Art zu gelangen, können wir wieder die in 4. durchgeführte Untersuchung berücksichtigen; wir erkennen dabei, dafs die dort gemachten Voraussetzungen auch für den vorliegenden Zweck genügen.

Nachdem in geeigneter Weise die Parameter $u_1 \dots u_r$ gewählt sind, wird die Gesamtheit der verschiedenen Lagen desselben Körpers durch ein System von Transformationen

$$(1) \quad y_\varkappa = \varphi_\varkappa (x_1 \dots x_n;\ u_1 \dots u_r) \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$

dargestellt. Hierbei werden die Parameter als wesentlich vorausgesetzt; wir verlangen nämlich, dafs sie sich nicht auf eine geringere Zahl zurückführen lassen. Auch sollen sie im folgenden stets so gewählt werden, dafs dem Wertsystem $u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$ die Anfangslage des Körpers entspricht; dann mufs sein:

$$(2) \quad x_\varkappa = \varphi_\varkappa (x_1 \dots x_n;\ 0 \dots 0); \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$

wir sagen, das System enthalte die identische Transformation.

Eine weitere Eigenschaft des Systems ergiebt sich durch folgende Betrachtung: Ist der Körper aus der Anfangslage in diejenige Lage übergeführt, welche durch das Wertsystem $(u_1 \dots u_r)$ bestimmt wird, so kann man ihn auch aus dieser Lage in die Anfangslage durch eine Bewegung zurückführen; man kann also auch von den Gröfsen $y_1 \dots y_n$ aus durch eine dem System angehörende Transformation die Variabeln $x_1 \dots x_n$ gewinnen. Mit anderen Worten: Wenn die Variabeln (y) aus den Variabeln (x) für irgend ein Wertsystem (u) der Parameter vermittelst der Gleichungen (1) hergeleitet sind, so giebt es jedesmal ein System $(v_1 \dots v_r)$ der Parameter, für welches sich die Gröfsen (x) in ganz entsprechender Weise vermittelst der Gröfsen (y) darstellen lassen; oder mit den Gleichungen (1) sind jedesmal die Gleichungen

$$x_\varkappa = \varphi_\varkappa (y_1 \dots y_n;\ v_1 \dots v_r) \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$

für zu bestimmende Werte von $v_1 \dots v_r$ verbunden. Das System der Transformationen ist demnach umkehrbar; es enthält zu jeder Transformation auch die inverse. Wie die Erweiterung der in 4. angestellten Betrachtung zeigt, kann man die Parameter $u_1 \dots u_r$ stets so wählen, dafs die Gröfsen $u_\varkappa$ und $v_\varkappa$, welche zu inversen Transformationen gehören, in der Beziehung stehen:

$$u_1 + v_1 = 0 \dots u_r + v_r = 0.$$

9. Unser dritter Grundsatz führt uns auf eine besonders wichtige Eigenschaft dieses Systems von Transformationen. Nachdem die Beziehung zwischen der ersten und zweiten Lage desselben Körpers durch die Gleichung (1) bestimmt ist, wo die Gröfsen $u_1 \dots u_r$ feste, die Gröfsen $x_1 \dots x_n$ veränderliche Werte

annehmen, denke ich mir einen zweiten Körper, der mit dem ersten kongruent ist und dessen Anfangslage mit der zweiten Lage des ersten Körpers identisch ist. Dann werden die einzelnen Punkte dieses Körpers durch die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ bestimmt. Gebe ich diesem Körper irgend eine neue Lage und bestimme ich die hierbei eingenommenen Örter der einzelnen Punkte des Körpers durch die Variabeln $z_1 \ldots z_n$, so kommt dies darauf hinaus, in den Gleichungen (1) die $y_\varkappa$ durch $z_\varkappa$, die $x_\varkappa$ durch $y_\varkappa$ zu ersetzen und statt $(u_1 \ldots u_r)$ andere Parameter $(v_1 \ldots v_r)$ zu wählen; es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$(3)\quad z_\varkappa = \varphi_\varkappa (y_1 \ldots y_n;\ v_1 \ldots v_r).$$

Nun kann ich aber den ersten Körper in jede Lage bringen, welche der zweite annimmt; es mufs also möglich sein, neue Parameter $(w_1 \ldots w_r)$ derartig zu bestimmen, dafs man mit ihrer Hilfe von den Variabeln (x) zu den Variabeln (z) gelangt. Mit den Gleichungen (1) und (3) müssen jedesmal die Gleichungen verbunden sein:

$$(4)\quad z_\varkappa = \varphi_\varkappa (x_1 \ldots x_n;\ w_1 \ldots w_r),$$

wo die $w_1 \ldots w_r$ blofse Funktionen von $u_1 \ldots u_r$ und $v_1 \ldots v_r$ sind. Wollen wir diese Eigenschaft rein analytisch aussprechen, so können wir sagen: Sind vermittelst der Gleichungen (1) für ein festes System (u) der Parameter die Variabeln (x) in die (y) übergeführt, wendet man auf die Variabeln (y) eine Transformation (3) des Systems an, welche durch die Parameter $v_1 \ldots v_r$ bestimmt ist, und gelangt man dadurch zu den Werten (z), so führt die Elimination der Variabeln (y) auf eine Beziehung zwischen den Variabeln (x) und (z), welche wiederum eine Transformation unseres Systems ist und nur von neuen Parametern abhängt: Unsere Transformationen bilden also im Lieschen Sinne eine Gruppe und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit eine stetige Transformations-Gruppe.

10. Der vierte Grundsatz verlangt, dafs jeder Punkt eines Körpers mit jedem Punkte des Raumes zur Deckung gebracht werden kann; demnach sind nur die transitiven Gruppen geeignet, die Bewegung in einer Raumform darzustellen.

Was die weitere analytische Behandlung betrifft, so brauchen wir nicht daran zu erinnern, dafs es von vornherein als notwendig erscheint, die ganze Untersuchung auf einen gewissen Bereich zu

beschränken; die schon früher bevorzugte Methode, zunächst die Gesetze für ein endliches, allseitig begrenztes Gebiet herzuleiten und erst später zur unbegrenzten Erweiterung überzugehen, erweist sich hier geradezu als allein berechtigt.

Bei den folgenden Anwendungen der Transformations-Gruppen auf die allgemeinen Raumformen müssen wir für die Funktionen, welche in den Gleichungen (1) auftreten, die Differentiierbarkeit voraussetzen und annehmen, dafs sie in gewöhnliche Potenzreihen entwickelt werden können, da sich die früher gefundenen Resultate auf diese beiden Annahmen stützen. Ob diese Forderung neue Annahmen nötig macht, läfst sich nicht übersehen.

11. Wie jede Raumform unter den gemachten Voraussetzungen auf eine Transformations-Gruppe führt, kann umgekehrt jede stetige transitive Gruppe von Transformationen als Raumform im allgemeinen Sinne aufgefafst werden. Zwar haben wir erkannt, dafs eine Gruppe, welche zur Darstellung einer Raumform geeignet sein soll, die identische Transformation enthalten mufs; indessen liegt hierin keine Beschränkung, wie wir in § 1 erwähnen konnten; es ist also nicht notwendig, neben der Transivität auch diese Eigenschaft der Gruppe eigens beizulegen.

Wenn die Gruppe in n Variabeln transitiv ist, so können wir immer ein Wertsystem finden, welches in alle Wertsysteme seiner Umgebung transformiert werden kann; es giebt daher einen endlichen Bereich, für dessen Wertsysteme die gleiche Eigenschaft gilt. Von einem solchen Gebiete gehen wir aus und beschränken es, wenn das nötig sein sollte, durch die weitere Forderung, dafs auch alle der Gruppe angehörenden Transformationen eindeutig bleiben, wofern man diesen Bereich nicht verläfst. Eine stetige n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Wertsystemen, die einen Teil des ausgewählten Gebietes bildet, nennen wir einen Raumteil oder auch einen Raum im Sinne unserer Grundsätze. Machen wir die Parameter der Gruppe in stetiger Weise abhängig von einer einzigen Variabeln, so entsteht eine kontinuierliche Folge von Transformationen, welche als eine Bewegung bezeichnet wird. Nach diesen Festsetzungen werden alle Gesetze befriedigt, welche durch unsere Grundsätze ausgesprochen werden; wir dürfen also sagen, die Gruppe stelle eine Raumform dar. Wir brauchen diesen Gedanken nicht weiter durchzuführen; es genügt, auf die

im Anfange von VII § 11 (S. 232 ff.) angegebenen Beispiele zu verweisen.

12. Um jetzt zu allen Raumformen zu gelangen, welche eine analytische Behandlung zulassen, brauchen wir nur alle transitiven Gruppen aufzusuchen. Dafs das neue Problem bedeutend einfacher ist als das ursprüngliche, erkennen wir schon, wenn wir uns auf die kleinsten Zahlen von Dimensionen beschränken. Eine Gruppe, durch welche eine einzige Variabele transformiert wird, kann allerdings unendlich viele Parameter enthalten; ist aber die Gliederzahl endlich, so kommen, wie Lie sehr früh nachgewiesen hat, alle Transformationen auf projektive Umgestaltungen hinaus; die Zahl der Parameter ist höchstens gleich drei; es giebt aber auch für eine Variabele ein- und zweigliedrige Gruppen. Lie hat aber auch schon die Aufgabe erledigt, für zwei und drei Variabele sämtliche Gruppen zu ermitteln, deren Gliederzahl endlich ist; es bietet also keine Schwierigkeit, für eine, zwei und drei Dimensionen alle Raumformen anzugeben, deren Beweglichkeit von einer endlichen Zahl von willkürlichen Gröfsen abhängt. Natürlich müssen wir hierbei alle Gruppen als identisch auffassen, welche im Sinne Lies einander ähnlich sind, welche also durch Einführung neuer Variabeln in einander übergeführt werden können. Es kommt dies darauf hinaus, dafs wir in einer n-dimensionalen Raumform die zunächst gewählten Koordinaten $x_1 \dots x_n$ durch beliebige n von einander unabhängige Funktionen $\varphi_1 (x_1 \dots x_n) \dots \varphi_n (x_1 \dots x_n)$ ersetzen können.

Dabei dürfen wir aber nicht vergessen, dafs die Transformations-Gruppen uns nur die Gesetze liefern, welche in einem gewissen endlichen Bereiche des Raumes gelten, für die unbegrenzte Erweiterung aber an sich nichts bieten. Es ist, wie wir mehrmals gesehen haben, ganz wohl möglich, dafs zwei Raumformen in allen Eigenschaften übereinstimmen, solange man sich auf einen gewissen endlichen Bereich beschränkt, dafs sie also zu derselben Gruppe gehören, während sie in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet ganz verschiedene Eigenschaften besitzen. Demnach mufs man, nachdem man vermittelst der zugehörigen Gruppe die Gesetze erforscht hat, die für jeden endlichen, hinreichend begrenzten Bereich gelten, in eine eigene Untersuchung darüber eingehen, ob das zu Grunde gelegte Gebiet in verschiedener

Weise erweitert werden könne. Indessen gehört die Durchführung dieses Gedankens nicht hierher. Wir sind hier bis zu dem Punkte gelangt, zu dem wir unsere allgemeinen Erörterungen führen mufsten; wir dürfen also jetzt zu dem Problem übergehen, welches uns in den folgenden Untersuchungen beschäftigen soll. Indessen glauben wir dem Leser einen Gefallen zu erweisen, wenn wir mehrere Raumformen, auf welche wir durch einige besondere Gruppen geführt werden, etwas weitläufiger charakterisieren. Die wichtigsten Eigenschaften der beiden ersten Raumformen sind bereits von Lie[29]) angegeben; das dritte Beispiel giebt nur allbekannte Sätze in einer Form, die für den vorliegenden Zweck besonders geeignet ist; das letzte Beispiel habe ich früher zu einem ganz speciellen Zwecke entwickelt.

13. Am Schlufs von § 6, 20 (S. 312) haben wir eine früher von Lie behandelte Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen bestimmt:

$$(5)\quad p_1,\ p_2,\ p_3,\ 2x_1p_1 + x_2p_2,\ 2x_1p_2 + x_2p_3,$$
$$4x_1^2p_1 + 4x_1x_2p_2 + x_2^2p_3.$$

Da der Nullpunkt durch die drei ersten Transformationen in eine ganz beliebige Lage übergeführt werden kann, so besitzt er dieselben Eigenschaften wie jeder andere Punkt des Raumes. Bleibt aber der Punkt (0, 0, 0) in Ruhe, so sind noch alle diejenigen Bewegungen möglich, welche der durch die drei letzten Transformationen (5) erzeugten Gruppe genügen. Diese Gruppe hängt von drei Parametern ab; wollte man aber nur die linearen Glieder berücksichtigen, so würde man zu der unrichtigen Meinung geführt werden, dafs diese Gruppe nur zwei Parameter enthielte.

In den drei letzten Symbolen (5) werden die Koefficienten von p_1, p_2, p_3 gleich null, wenn $x_1 = x_2 = 0$ gesetzt wird; alle Punkte dieser Linie bleiben also unbewegt, sobald der Nullpunkt in Ruhe gehalten wird. Die Punkte der Fläche $x_1 = 0$ erleiden alsdann diejenigen Veränderungen, welche der aus den Transformationen x_2p_2, x_2p_3, $x_2^2p_3$ hervorgehenden Gruppe entsprechen; jeder Punkt dieser Fläche, welcher nicht auf der unbewegten Linie liegt, kann in alle Punkte eines zweifach ausgedehnten Gebietes übergeführt werden. Auch jede Fläche $4x_1(x_3 - c) = x_2^2$ bleibt bei der Drehung um den Nullpunkt in

Deckung mit ihrer Anfangslage. Bei der Ruhe eines Punktes wird somit jede Fläche eines Büschels in sich verschoben; alle diese Flächen berühren sich längs einer Linie, und alle Punkte dieser Linie bleiben unbewegt.

Von diesen Flächen wird unter Vermittlung der eingeführten Koordinaten x_1, x_2, x_3 im euklidischen Raume eine als Ebene, die anderen als Kegel zweiter Ordnung abgebildet; der aus den Bildflächen bestehende Büschel hat die Eigenschaft, dafs alle seine Flächen Kegel sind, die sich längs einer Geraden berühren; jeder Punkt der gemeinsamen Tangente ist die Spitze eines Kegels, und unter den Kegeln ist einer, der in ein Ebenenpaar zerfällt.

Soll aufser dem Nullpunkte noch ein zweiter Punkt a_1, a_2, a_3 in Ruhe gehalten werden, so dürfen die Koordinaten a_1 und a_2 nicht beide verschwinden. Natürlich bleibt jetzt auch jeder Punkt der Linie $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ unbewegt. Diejenige Bewegung, welche jetzt noch möglich ist, wird beschrieben durch die eingliedrige Gruppe, welche aus der Transformation

$$(6) \quad 4(x_1 - a_1)x_1 p_1 + (4x_1 x_2 - 2a_1 x_2 - 2a_2 x_1)p_2 + (x_2 - a_2)x_2 p_3$$

hervorgeht; jeder einzelne Punkt bewegt sich nur auf einer Linie. Nur die Punkte der beiden Linien $(x_1 = x_2 = 0)$ und $(x_1 = a_1$, $x_2 = a_2)$ bleiben in Ruhe.

Jede Bahnlinie genügt den beiden Gleichungen:

$$(7) \quad 4x_1(x_3 - c) = x_2^2 \text{ und}$$
$$4(x_1 - a_1)(x_3 - c') = (x_2 - a_2)^2,$$

wo die Konstanten c und c' durch die Anfangslage des Punktes bestimmt werden. Ist für die Anfangslage $x_1 = 0$, so mufs die erste Gleichung durch $x_1 = 0$ ersetzt werden; in entsprechender Weise mufs statt der zweiten Gleichung (7) die Bedingung $x_1 = a_1$ erfüllt werden, wenn dies für die Anfangslage gilt. In diesen beiden Fällen wird die Bahnlinie durch eine Parabel abgebildet. Auch im allgemeinen fallen durch Subtraktion der Gleichungen (7) die Glieder zweiter Ordnung weg; der Bahnlinie entspricht also immer eine ebene Kurve des euklidischen Raumes. Dafs keine dieser Kurven geschlossen ist, leitet man am einfachsten aus den Differentialgleichungen her, welche aus dem Symbol (6) hervorgehen; nur mufs man beim Beweise die beiden Fälle unterscheiden, dafs a_1 verschwindet und dafs a_1 von null verschieden ist.

14. Für das folgende Beispiel ersetzen wir der einfacheren Schreibweise wegen die Variabeln x_1, x_2, x_3 der Reihe nach durch x, y, z und die Symbole p_1, p_2, p_3 durch p, q, r. Dementsprechend gehen wir mit Lie von den Transformationen aus:

$$(8)\quad p,\ q,\ px + qy + r,\ py - qx,\ (x^2 - y^2)\,p + 2xyq + 2xr,\ 2xyp + (y^2 - x^2)\,q + 2yr.$$

Um die Gesetze herzuleiten, die bei der Drehung um einen beliebigen Punkt gelten, dürfen wir wiederum den Nullpunkt als ruhend voraussetzen. Hierbei bleiben alle Punkte der Linie $x = y = 0$ in Ruhe; alle anderen Punkte bewegen sich in Flächen, deren Gleichungen sind:

$$(9)\quad (x^2 + y^2)\,e^{-z} = (x_0^2 + y_0^2)\,e^{-z_0},$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Punktes in seiner Anfangslage und x, y, z die Koordinaten denselben Punkt in irgend einer anderen Lage darstellen. Alle Bewegungen, welche jetzt noch statthaben, hangen von drei willkürlichen Gröfsen ab; unter ihnen ist diejenige besonders bemerkenswert, welche aus der infinitesimalen Transformation $py - qx$ hervorgeht und welche ganz der gewöhnlichen Drehung um eine Gerade entspricht.

Soll aufser dem Nullpunkte noch ein zweiter Punkt (a, b, c) in Ruhe verbleiben, so dürfen die Koordinaten a und b nicht beide verschwinden. Die Bewegung wird in diesem Falle durch eine eingliedrige Gruppe dargestellt, welche aus der Transformation hervorgeht:

$$(10)\quad \left(y + \frac{b\,(x^2 - y^2) - 2axy}{a^2 + b^2}\right) p + \left(-x + \frac{a(x^2 - y^2) + 2bxy}{a^2 + b^2}\right) q - 2\,\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\,r.$$

Wohl wird jetzt auch jeder Punkt der Linie $(x = a,\ y = b)$ in Ruhe verbleiben; aber jeder Punkt, der weder dieser Linie noch der Linie $(x = y = 0)$ angehört, wird bewegt werden, und zwar eine in sich verschiebbare Linie beschreiben.

Um eine besonders interessante Eigenschaft dieser Linie herzuleiten, schlägt Lie folgenden Weg ein. Aus (10) folgen für x und y die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{b(x^2 - y^2) - 2axy}{a^2 + b^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \frac{a(x^2 - y^2) + 2bxy}{a^2 + b^2},$$

und daraus ergiebt sich weiter:

$$\frac{d(x + yi)}{dt} = -i(x + yi) + i\frac{(x + yi)^2}{a + bi}.$$

Da für $t = 0$ zugleich $x = x_0$, $y = y_0$ sein mufs, so ist die Lösung dieser Gleichung:

$$(11) \quad x + yi = \frac{(a + bi)(x_0 + y_0 i)}{x_0 + y_0 i - [(x_0 - a) + i(y_0 - b)]e^{ti}}.$$

Hieraus geht hervor, dafs für $t = 2\pi$ allgemein $x + yi = x_0 + y_0 i$, also $x = x_0$, $y = y_0$ wird. Nun lehrt die Gleichung (9), dafs dann auch $z = z_0$ wird, oder dafs alle Punkte bei fortschreitender Drehung um zwei beliebige feste Punkte gleichzeitig in ihre Anfangslage zurückkehren. Zugleich folgt aus der letzten Gleichung, dafs, abgesehen von den Punkten (0, 0, z) und (a, b, z) irgend ein Punkt nur dann seine Anfangslage wieder einnimmt, wenn $e^{ti} = 1$ ist.

Wollte man sich in den Ausdrücken (8) auf die Glieder erster Ordnung beschränken, so würde man zu einer Gruppe gelangen, die von der soeben beschriebenen wesentlich verschieden ist.

15. Einiges Interesse dürfte es gewähren, nochmals einen Blick auf die allgemeinsten projektiven Umgestaltungen des dreidimensionalen Raumes zu werfen. Halten wir einen Punkt fest, so können wir jeden zweiten Punkt in alle Lagen bringen mit einziger Ausnahme derjenigen, welche der ruhende Punkt einnimmt. Bleibt noch ein zweiter Punkt in Ruhe, so kann ihre Verbindungs-Gerade nur noch in sich bewegt werden, dagegen kann jeder Punkt, der dieser Geraden nicht angehört, abgesehen von dieser Linie an jede Stelle des Raumes gebracht werden. Bei der Ruhe dreier nicht in gerader Linie liegender Punkte kann die durch sie hindurchgelegte Ebene nur in sich verschoben werden; auch kann in diese Ebene kein Punkt während der Bewegung hineinfallen, der ihr nicht in der Anfangslage angehört; aber im übrigen ist die Bewegung noch unbeschränkt. Läfst man vier

Punkte in Ruhe, die nicht in einer Ebene liegen, so behält jeder Punkt seine Lage gegen das Tetraeder bei, das die ruhenden Punkte zu Eckpunkten hat; eine weitere Beschränkung seiner Bewegung findet aber nicht statt. Erst bei der Ruhe von fünf Punkten, von denen keine vier in einer Ebene liegen, behält jeder Punkt seine Lage bei.

16. Zum Schlufs betrachten wir eine zweidimensionale Raumform, für deren Bewegungen von Lie die sechs infinitesimalen Transformationen p, px, px^2, q, qy, qy^2 zu Grunde gelegt werden; Lie behauptet, dafs bei passender Wahl der Koordinaten aus diesen Transformationen die allgemeinste ebene Gruppe hervorgehe, durch welche alle Kreise in einander übergeführt werden. Wir gehen von einer anderen Darstellung aus, welche es uns möglich macht, bekannte Sätze der Raumgeometrie zu benutzen. Zu dem Ende setzen wir x_0, x_1, x_2, x_3 als projektive Raumkoordinaten voraus, beschränken die projektive Umgestaltung des Raumes durch die Forderung, dafs die durch die Gleichung

$$(12)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$$

dargestellte reelle nicht-geradlinige Fläche zweiter Ordnung in sich verbleibt, und untersuchen die Veränderungen, welche jetzt auf der Fläche vor sich gehen. Die zweidimensionale Raumform stellen wir demnach durch die vier veränderlichen Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 dar, verlangen aber, dafs zwischen ihnen die Gleichung (12) besteht und dafs bei einem von null verschiedenen, sonst ganz beliebigen Werte von μ durch das Wertsystem (μx_0, μx_1, μx_2, μx_3) derselbe Punkt dargestellt wird, wie durch (x_0, x_1, x_2, x_3). Für die Untersuchung können wir von den sechs Transformationen ausgehen:

$$p_0x_1 + p_1x_0,\ p_0x_2 + p_2x_0,\ p_0x_3 - p_3x_0,$$
$$p_2x_3 - p_3x_2,\ p_3x_1 - p_1x_3,\ p_1x_2 - p_2x_1;$$

wir können aber auch die bekannten Eigenschaften der projektiven Umgestaltung des dreidimensionalen Raumes zu Grunde legen.

Die Lage dreier Punkte ist durchaus willkürlich; werden aber drei Punkte in Ruhe gehalten, so ist keine Bewegung möglich. Bei der Ruhe zweier Punkte kann jeder dritte noch an jeden beliebigen Ort gebracht werden, natürlich mit Ausnahme der von den ruhenden Punkten eingenommenen Örter. Die in sich ver-

schiebbaren Linien, welche ein dritter Punkt bei der Drehung um zwei Punkte beschreiben kann, sind entweder geschlossen, oder sie umlaufen die ruhenden Punkte unendlich oft und nähern sich ihnen unbegrenzt. Die geschlossenen Linien nennen wir Kreise; für sie gelten folgende Sätze:

a) Es giebt nur einen einzigen Kreis, der zwei gegebene Punkte zu Mittelpunkten hat und durch einen vorgeschriebenen Punkt geht.

b) Alle Kreise sind kongruent.

c) Wenn bei der Drehung um zwei Punkte zwei Kreise beschrieben werden, so bewegen sich alle Punkte in Kreisen, und alle Punkte kehren gleichzeitig in ihre Anfangslagen zurück.

Für den Beweis all dieser Behauptungen genüge folgende Andeutung. Werden zwei Punkte der Fläche in Ruhe gehalten, so bleiben bei der projektiven Umgestaltung des Raumes die beiden Tangentialebenen, also auch ihre Schnittlinie, in Deckung mit ihrer Anfangslage. Hierbei können zwei (und damit alle) weiteren Ebenen des Büschels, welcher diese Gerade zur Achse hat, in Deckung mit der Anfangslage bleiben; es kann aber aufser den Tangentialebenen eine oder keine Ebene des Büschels die Anfangslage beibehalten. Berücksichtigt man diese, so kann man den Beweis der aufgestellten Sätze leicht führen.

§ 8.

Helmholtz' Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.

1. Nachdem wir gezeigt haben, dafs die Theorie der allgemeinen Raumformen eng mit der der Transformations-Gruppen zusammenhängt, müssen wir nach denjenigen Eigenschaften fragen, welche zur Charakterisierung der eigentlichen Raumformen geeignet sind. Mit dieser Frage hat sich v. Helmholtz[30]) bereits beschäftigt, ehe die Habilitations-Vorlesung Riemanns gedruckt war, und die Resultate kurz nach dem Erscheinen des Riemannschen Aufsatzes veröffentlicht. Da ihm die Transformations-Gruppen unbekannt waren, konnte er die scharfe Beweisführung, welche durch diese Theorie ermöglicht wird, nicht erreichen. Trotzdem bietet seine Lösung noch jetzt hohes Interesse, da erstens seine Arbeit der erste Versuch war, der in der angegebenen

Richtung unternommen wurde, zweitens seine Principien im wesentlichen richtig sind, und drittens die Ausführung trotz einzelner Mängel einen richtigen Kern enthält. Bei der Darlegung schliefsen wir uns der Arbeit an, welche er im Juni 1868 in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat.

2. Helmholtz fafst seine Voraussetzungen, »die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen«, in vier Sätze zusammen, von denen die meisten an sich wieder in eine Reihe von Annahmen zerfallen. An erster Stelle verlangt er, dafs der Raum von n Dimensionen eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist. Er fafst also den Raum als Zahlenmannigfaltigkeit auf und verlangt, dafs den einzelnen Punkten auf irgend eine Weise die Wertsysteme einer Mannigfaltigkeit von n unbeschränkt veränderlichen Gröfsen $x_1, x_2 \dots x_n$ stetig und eindeutig zugeordnet werden können.

An zweiter Stelle wird die Existenz von beweglichen, aber in sich festen Körpern (oder Punktsystemen) vorausgesetzt. Demnach stellt er folgende Definition auf: »Zwischen den 2n Koordinaten eines jeden Punktepaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle kongruenten Punktepaare die gleiche ist.« Hierbei sollen alle Punktepaare kongruent sein, welche gleichzeitig oder nach einander mit demselben Punktepaare des Raumes zusammenfallen können.

Drittens setzt Helmholtz die vollkommen freie Beweglichkeit fester Körper voraus; d. h. er verlangt, dafs jeder Punkt eines solchen an den Ort jedes andern kontinuierlich übergehen könne, soweit er nicht durch die Gleichungen, die zwischen ihm und den übrigen Punkten des festen Systems bestehen, zu dem er gehört, gebunden ist. Der erste Punkt eines in sich festen Systems soll absolut beweglich sein. Wenn er festgestellt ist, besteht für den zweiten Punkt eine Gleichung, und eine seiner Koordinaten wird Funktion der n — 1 übrigen. Nachdem auch der zweite festgetellt ist, bestehen zwei Gleichungen für den dritten u. s. w.

Ehe die vierte Voraussetzung formuliert wird, giebt Helmholtz zwei Definitionen. Er charakterisiert die Drehung dadurch, dafs eine gewisse Anzahl von Punkten des bewegten Körpers

während der Bewegung unveränderte Koordinaten behalten, und die Umkehr einer Bewegung dadurch, dafs früher durchlaufene kontinuierlich in einander übergehende Wertkomplexe der Koordinaten rückwärts durchlaufen werden. Hiernach fügt er den drei ersten Voraussetzungen die folgende bei: Wenn ein fester Körper sich um n — 1 seiner Punkte dreht und diese so gewählt sind, dafs seine Stellung nur noch von einer unabhängigen Veränderlichen abhängt, so führt die Drehung ohne Umkehr schliefslich in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen ist. Die letzte Eigenschaft, das »Axiom der Monodromie«, wird, wie Helmholtz hervorhebt, von der gewöhnlichen Geometrie dadurch stillschweigend vorausgesetzt, dafs sie den Kreis als geschlossene Linie behandelt.

3. Die Folgerungen aus seinen Annahmen entwickelt Helmholtz nur für den Raum von drei Dimensionen. Er läfst einen Punkt des Raumes in Ruhe und betrachtet die Bewegung derjenigen Punkte, welche ihm unendlich nahe sind. Demnach setzt er die Unterschiede der Koordinaten dieser Punkte von denen des ruhenden Punktes gleich εx, εy, εz, wo ε eine unendlich kleine Gröfse bedeuten soll. Dann glaubt er aus seinen drei ersten Hypothesen folgern zu können, dafs die Änderungen der Gröfsen x, y, z sich unter Einführung einer neuen Variabeln η durch Auflösung der Differentialgleichungen ergeben:

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= a_0 x + b_0 y + c_0 z \\ \frac{dy}{d\eta} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dz}{d\eta} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{aligned}$$

wo die neun Koefficienten drei willkürlich veränderliche Gröfsen einschliefsen.

Indem er jetzt sein viertes Axiom hinzunimmt, leitet er aus diesen Gleichungen den Satz her, dafs bei der Ruhe eines zweiten Punktes die Punkte einer Linie in Ruhe bleiben; ferner zeigt er, dafs bei allen Drehungen um einen festen Punkt ein gewisser quadratischer Ausdruck der Differentiale denselben Wert beibehält.

4. Wir müssen aber davon Abstand nehmen, sein Beweisverfahren mitzuteilen, da der Satz, von dem Helmholtz ausgeht,

nicht richtig ist. Für seinen Beweis ist es nämlich wesentlich, dafs die Differentialgleichungen (1) drei willkürliche Parameter enthalten. Nun hängt allerdings die Drehung des Körpers um einen Punkt von drei willkürlichen Gröfsen ab; die vollständigen Differentialgleichungen, durch welche alle bei der Ruhe eines Punktes möglichen Bewegungen charakterisiert werden, enthalten somit drei Parameter. Man darf also annehmen, dafs die Drehung durch drei Gleichungen bestimmt wird, welche die Form haben:

$$(2) \quad \frac{dx_\alpha}{d\eta} = \psi_\alpha (x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3). \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Auch müssen, wofern man den ruhenden Punkt zum Nullpunkt der Koordinaten nimmt, die Funktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3 für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bei beliebiger Wahl der Gröfsen u_1, u_2, u_3 verschwinden; die Entwicklungen dieser drei Funktionen fangen also mit den ersten Potenzen der Variabeln an. Man darf aber nicht mit Helmholtz schliefsen, dafs die Parameter u_1, u_2, u_3 sämtlich bereits in die Glieder der ersten Dimension eingehen, da es, wie Lie bemerkt, wohl denkbar ist, dafs in diesen Gliedern nur eine oder zwei Funktionen der Parameter vorkommen.

Um dies Bedenken als berechtigt nachzuweisen, betrachtet Lie eine gröfsere Zahl von Gruppen und vergleicht darin die vollständigen Ausdrücke für $\frac{dx_\alpha}{d\eta}$ mit den verkürzten, d. h. mit denjenigen, welche man erhält, wenn man sich darin nur auf die linearen Glieder beschränkt. Hierbei zeigt sich, dafs zu den verkürzten Gruppen vielfach ganz andere Gruppen gehören, als zu den vollständigen, dafs somit die Beschränkung auf die linearen Glieder häufig die Eigenschaften einer Gruppe wesentlich verändert.

5. Einer derartigen allgemeinen Untersuchung bedarf es aber im vorliegenden Falle nicht. Helmholtz glaubt nachweisen zu können, dafs für jeden dreidimensionalen Raum, welcher seinen drei ersten Voraussetzungen genügt, die Gleichungen (1) drei Parameter besitzen. Sein Beweis wird also nicht als streng angesehen werden können, wenn es möglich ist, eine Raumform anzugeben, für welche die drei ersten Axiome Helmholtz' richtig bleiben, während die Gleichungen (1) nur zwei willkürliche Konstanten enthalten. Eine solche Raumform ist aber, worauf Lie

hingewiesen hat, diejenige, welche durch die Gruppe bestimmt wird:

$$p_1, p_2, p_3, 2x_1p_1 + x_2p_2, 2x_1p_2 + x_2p_3,$$
$$4x_1^2p_1 + 4x_1x_2p_2 + x_2^2p_3.$$

Von dieser Raumform haben wir in § 7, 13 (S. 324) bewiesen, dafs sie den drei ersten Helmholtzschen Axiomen genügt, dafs aber in die Glieder der ersten Dimension, zu denen die Gleichungen (2) führen, nicht, wie Helmholtz meint, drei, sondern nur zwei willkürliche Parameter eintreten. Die Grundlage der von Helmholtz durchgeführten Rechnung ist also unrichtig.

6. Lie findet in den Helmholtzschen Voraussetzungen eine gewisse Unklarheit, indem man nicht erkennt, ob sie nur im allgemeinen gelten oder für alle Punkte in der Umgebung gewisser Punkte richtig sein sollen. Läfst man, um im dreidimensionalen Raume zu bleiben, einen Punkt in Ruhe, so verlangt Helmholtz, dafs für einen zweiten Punkt eine Gleichung besteht; seine Worte können so gedeutet werden, als fordere er, dafs der zweite Punkt in alle Lagen übergeführt werden kann, die der für ihn geltenden Gleichung genügen. Lie selbst bezeichnet diese Auffassung als unwahrscheinlich; ich möchte aber glauben, sie ganz ausschliefsen zu sollen. Am Schlufs der Arbeit, die wir hier besonders berücksichtigen, erwähnt Helmholtz zwei Raumformen, welche seinen drei ersten Hypothesen, aber nicht dem Monodromie-Axiom genügen. Bei dem zweiten Beispiel nimmt er für zwei Dimensionen die gleichseitige Hyperbel als die Linie gleichwertiger Entfernung von einem festen Punkte an. In diesem Falle wird die zugehörige Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen bestimmt: p, q, $py + qx$. Lassen wir einen Punkt in Ruhe, so bewegen sich alle Punkte der Ebene in Hyperbeln, und diese haben dieselben Asymptoten, welche sich im ruhenden Punkte schneiden. Wir sehen also, dafs die Abstandsfunktion die Lage des bewegten Punktes auf eine Hyperbel beschränkt, während er bei der Umgestaltung der Ebene auf demselben Zweige bleiben mufs. Indessen hangen die beiden Zweige der Hyperbel auch geometrisch nicht zusammen; die Liesche Auffassung wird also hierdurch noch nicht ganz ausgeschlossen. Dagegen kann ein Punkt, der bei Beginn der Bewegung auf einer Asymptote liegt, niemals mit dem ruhenden Punkte, der doch ebenfalls auf

der Linie liegt, zusammenfallen; er mufs auch während der ganzen Bewegung auf derjenigen, vom ruhenden Punkte ausgehenden Halbgeraden verbleiben, der er in der Anfangslage angehört. Dies Beispiel läfst also die Liesche Deutung nicht zu.

7. Nun zeigt Lie, dafs bei der strengen Deutung die ersten drei Helmholtzschen Axiome für sich ohne das Monodromie-Axiom ausreichen, aber bei anderer Deutung seine Hypothesen noch Möglichkeiten zulassen, welche ausgeschlossen werden sollen. Da wir wegen des einen von Helmholtz beigefügten Beispiels seine Worte nicht in der ersten Weise deuten können, so müssen wir leider anerkennen, dafs seine Axiome nicht genügen, um die eigentlichen Raumformen den uneigentlichen gegenüber zu charakterisieren. Der Begründung wegen erinnern wir an die in § 7, 14 (S. 326) behandelte Raumform. Auch hier bleibt bei der Ruhe eines Punktes jeder Punkt einer Linie in Ruhe, aber jeder andere Punkt kann noch in einer Fläche derartig bewegt werden, dafs die Gesamtheit der Bewegungen von drei Parametern abhängt. Wird noch ein zweiter Punkt und damit eine zweite Linie in Ruhe gehalten, so bewegen sich alle anderen Punkte in geschlossenen Linien und kehren gleichzeitig in ihre Anfangslage zurück. Diese Möglichkeit wurde von Helmholtz deshalb übersehen, weil die Differential-Gleichungen der Bewegung eine wesentliche Veränderung erleiden, wenn man sich in ihrem Ausdruck auf die Glieder der ersten Dimension beschränkt.

8. So sehen wir denn, dafs die Axiome, von denen Helmholtz ausgeht, nicht ausreichen, und dafs sein Beweis eine Lücke enthält. Dennoch hüte man sich, die Bedeutung seiner Arbeit zu unterschätzen. Seine Axiome stellen trotz ihrer Mangelhaftigkeit das Urbild dar, nach welchem alle späteren Versuche, die eigentlichen Raumformen den allgemeinen gegenüber zu charakterisieren, ohne Ausnahme gebildet sind. Auch die Lücken im Beweise lassen sich auf dem von Helmholtz selbst eingeschlagenen Wege beseitigen; indessen ist es nicht nötig, darauf einzugehen, da mittlerweile die Theorie der Transformations-Gruppen uns einfachere Methoden darbietet.

§ 9.

Lies Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

1. Lies Arbeiten[31]) auf diesem Gebiete bedeuten nach mehreren Richtungen hin einen Fortschritt; denn erstens giebt er dem Problem eine schärfere Fassung, zweitens geht er von einfacheren Voraussetzungen aus, und drittens genügt sein Beweis den strengsten Anforderungen. Der zu lösenden Aufgabe, die Lie als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet, giebt er folgenden Ausdruck: »Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schar der euklidischen, wie den beiden Scharen von nicht-euklidischen Bewegungen zukommen, und durch die diese beiden Scharen vor allen anderen möglichen Scharen von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind.«

Von diesem Problem giebt er zwei Lösungen, von denen sich die erste auf unendlich benachbarte, die andere auf endlich entfernte Punkte bezieht. Die erste Lösung geht von der Definition aus:

»Eine reelle kontinuierliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie die folgenden Forderungen erfüllt: Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch kontinuierliche Bewegung möglich sein; hält man dagegen aufser P und jenem Linienelemente noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine kontinuierliche Bewegung mehr möglich sein.«

Dementsprechend charakterisiert Lie die euklidischen und die nicht-euklidischen Bewegungen im dreifach ausgedehnten Raume durch freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, indem er das Theorem beweist:

»Besitzt eine reelle kontinuierliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie sechsgliedrig und transitiv und durch eine reelle Punkttransformation dieses Raumes ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen dieses Raumes oder mit einer der beiden Gruppen von nicht-euklidischen Bewegungen dieses Raumes, also im zweiten Falle

entweder mit der sechsgliedrigen reellen kontinuierlichen projektiven Gruppe, bei der die imaginäre Fläche: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$ invariant bleibt, oder mit der reellen kontinuierlichen projektiven Gruppe der reellen nichtgeradlinigen Fläche: $x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$.«

Auf den Beweis können wir hier nicht eingehen, da aus der Theorie der Transformations-Gruppen zahlreiche Sätze benutzt werden, die wir vorhin nicht haben mitteilen können.

2. Lie überträgt seine Theorie der freien Bewegung im Infinitesimalen auf Räume von beliebig vielen Dimensionen. Dabei macht er von folgenden Ausdrücken Gebrauch. Durch jeden Punkt eines n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$ gehen ∞^{n-1} Linienelemente $dx_1 : \ldots : dx_n$, die eine $(n-1)$-fach ausgedehnte projektive Mannigfaltigkeit bilden; jedes ebene Büschel von ∞^1 solchen Linienelementen im R_n wird Element einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen oder kürzer M_2-element genannt. Ebenso soll jedes ebene Bündel von ∞^2 Linienelementen als Element einer Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen oder kurz als M_3-element bezeichnet werden, und so weiter. Für Linienelement soll zuweilen die Benennung M_1-element angewandt werden.

Hiernach wird folgende Definition aufgestellt:

»Eine reelle Gruppe von Punkttransformationen des R_n besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie folgende Forderungen erfüllt: Wird der Punkt P festgehalten, ferner ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-element, ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2-element, ein beliebiges durch alle drei gehendes reelles M_3-element, und so fort, schliefslich ein reelles Mq-element, das durch jedes der vorherigen Elemente geht, so soll kontinuierliche Bewegung möglich sein, so lange, aber auch nur so lange, als $q < n-1$ ist.«

Im Anschlufs an diese Definition fordert Lie, dafs diejenigen Räume ermittelt werden sollen, welche in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen. Er findet, dafs nur der euklidische Raum und die beiden nicht-euklidischen Räume (im engern Sinne) dieser Forderung genügen, indem er das Theorem beweist:

»Besitzt eine reelle kontinuierliche Gruppe des R_n $(n \geqq 3)$ in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit

im Infinitesimalen, so ist sie $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und transitiv und durch eine reelle Punkttransformation des R_n ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen dieses Raumes oder mit einer der beiden Gruppen von nicht-euklidischen Bewegungen, also im zweiten Falle entweder mit der reellen kontinuierlichen projektiven Gruppe der Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1 = 0$$

oder mit der reellen kontinuierlichen Gruppe der Mannigfaltigkeit:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0.«$$

Über den Beweis bemerken wir nur, dafs Lie seinen Satz für den Raum von $n \geqq 3$ Dimensionen als bewiesen annimmt, dann alle reellen kontinuierlichen Gruppen des R_{n+1} aufsucht, die in irgend einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen, und daraus den Nachweis dafür herleitet, dafs sein Theorem auch im Raume von $n+1$ Dimensionen gültig ist.

3. Lie giebt aber noch eine zweite Lösung des Problems. Dabei geht er für den dreidimensionalen Raum von folgenden vier Axiomen aus:

I. Der R_3 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.

II. Die Bewegungen des R_3 bilden eine reelle kontinuierliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe.

III. Hält man einen beliebigen reellen Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte: x_1, x_2, x_3, in die ein anderer reeller Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0; x_1^0, x_2^0, x_3^0; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die für $x_1 = y_1^0$, $x_2 = y_2^0$, $x_3 = y_3^0$ nicht erfüllt ist und die (im allgemeinen) eine reelle, durch den Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 gehende Fläche darstellt.

IV. Um den Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 herum läfst sich ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, dafs nach Festhaltung des Punktes: y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andere reelle Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 des Bereiches noch kontinuierlich in jeden dem Bereiche angehörenden reellen Punkt übergehen kann, der die Gleichung $W = 0$ befriedigt und der mit dem Punkte: x_1^0, x_2^0, x_3^0 durch eine irreducible kontinuierliche Reihe von Punkten verbunden ist.«

Lie glaubt, dafs diese Axiome auch genügen, wenn man die eingeklammerten Worte: »im allgemeinen« beibehält; indessen will er hierauf kein Gewicht legen.

Die Schar der Punkte (x), welche der Gleichung $W = 0$ genügen, bildet im allgemeinen eine Fläche, die »Pseudokugel« mit dem Mittelpunkt (y^0), welche durch den Punkt (x^0) geht; nach dem dritten Axiom geht sie niemals durch den Mittelpunkt. Jetzt verlangt das vierte Axiom, dafs jeder Punkt (x^0), der in einer gewissen Umgebung des Punktes (y^0) liegt, sich bei der Ruhe von (y^0) frei auf der durch ihn gehenden Pseudokugel bewegen kann, die den Punkt (y^0) zum Mittelpunkte hat.

Lie selbst weist darauf hin, dafs seine Axiome weit weniger verlangen, als die von Helmholtz zu Grunde gelegten; darin wird man ihm unbedingt beistimmen. Der Beweis zerfällt in mehrere Teile. An erster Stelle wird gezeigt, dafs die zugehörige Gruppe transitiv und reell-primitiv ist, d. h. keine reelle Fläche oder Kurve in Ruhe läfst; daran schliefst sich der Nachweis, dafs die Gruppe von sechs Parametern abhängt, dafs zwischen zwei endlich von einander entfernten Punkten eine einzige Invariante besteht, und dafs bei der Ruhe eines Punktes die von ihm ausgehenden Linienelemente dreigliedrig transformiert werden. Indem Lie jetzt die Untergruppe untersucht, welche die Bewegung der von dem ruhenden Punkte ausgehenden Linienelemente regelt, gelangt er zu dem Satze, dafs nur die euklidischen und die Scharen der nicht-euklidischen Bewegungen seinen Forderungen genügen.

4. Auch für vier Dimensionen führt Lie seine Entwicklungen vollständig durch. Seine Axiome sind in diesem Falle die folgenden:

»I. Der R_4 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.

II. Die Bewegungen des R_4 bilden eine reelle, kontinuierliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe.

III. Hält man einen beliebigen reellen Punkt: $y_1^0 \ldots y_4^0$ von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte: $x_1 \ldots x_4$, in die ein anderer reeller Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0 \ldots y_4^0;\ x_1^0 \ldots x_4^0;\ x_1 \ldots x_4) = 0,$$

die für: $x_1 = y_1^0 \ldots x_4 = y_4^0$ nicht erfüllt ist und die im

allgemeinen eine reelle durch den Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ gehende dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit darstellt.

IV. Um den Punkt: $y_1^0 \ldots y_4^0$ herum läfst sich ein endlicher vierfach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, dafs die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Hält man den Punkt: $y_1^0 \ldots y_4^0$ fest, so kann jeder andere reelle Punkt: $x_1^0 \ldots : x_4^0$ des Bereichs noch kontinuierlich in alle reellen Punkte: $x_1 \ldots x_4$ übergehen, die der obigen Gleichung $W = 0$ genügen. Hält man aufser dem Punkte: $y_1^0 \ldots y_4^0$ noch einen zweiten reellen Punkt: $z_1^0 \ldots z_4^0$ des Bereichs fest, so kann jeder andere reelle Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ des Bereichs noch kontinuierlich in alle reellen Punkte: $x_1 \ldots x_4$ des Bereichs übergehen, die der obigen Gleichung und der Gleichung:

$$W(z_1^0 \ldots z_4^0;\ x_1^0 \ldots x_4^0;\ x_1 \ldots x_4) = 0$$

genügen. Dabei wird jedesmal vorausgesetzt, dafs die beiden Punkte: $x_1^0 \ldots x_4^0$ und $x_1 \ldots x_4$ durch eine irreducible kontinuierliche Reihe von Punkten derselben Art verbunden sind.«

Das dreidimensionale Gebilde, auf dem ein Punkt bei der Drehung um einen festen Punkt verbleibt, läfst Bewegungen in sich zu, für welche die beim dreidimensionalen Raume vorausgesetzten Axiome ausnahmslos gelten. Diese Bemerkung gestattet, mit besonderer Leichtigkeit für den vierfach ausgedehnten Raum die Folgerung aus den angegebenen Axiomen zu ziehen und nachzuweisen, dafs ihnen nur die Bewegungen des euklidischen, des Lobatschewskyschen und des Riemannschen Raumes genügen.

5. Für den mehrdimensionalen Raum begnügt sich Lie mit einigen Andeutungen; indessen sind diese vollständig genügend, erstens ein System von ausreichenden Forderungen aufzustellen und zweitens den Gang der Beweise übersehen zu lassen. Wohl weist er darauf hin, dafs seine Voraussetzungen einfacher sind als die von Helmholtz aufgestellten; dennoch neigt er der Meinung zu, dafs auch seine Axiome noch mehr voraussetzen, als unbedingt notwendig ist.

§ 10.

Eine andere Charakterisierung der eigentlichen Raumformen.

1. Dem Raume legen wir wiederum von vornherein die durch unsere Grundsätze ausgesprochenen Eigenschaften bei; wir

nehmen ferner an, dafs seine Punkte den Wertsystemen einer Mannigfaltigkeit stetig entsprechen und dafs die in ihnen möglichen Bewegungen durch die Transformationen einer Gruppe dargestellt werden können. Um unsere allgemeinen Gesetze über Transformations-Gruppen anwenden zu können, müssen wir ferner voraussetzen, dafs die Ausdrücke für die unendlich kleinen Transformationen, aus denen die Gruppe hervorgeht, diejenigen Differentiationen zulassen, auf die sich der Beweis der in § 1 zusammengestellten Sätze stützt. Nachdem wir allen Raumformen diese Eigenschaften beigelegt haben, suchen wir diejenigen Raumformen, welche unserer Erfahrung genügen, allen übrigen gegenüber zu charakterisieren. Dementsprechend fügen wir zu den allgemeinen Eigenschaften der Raumformen neue Axiome hinzu und fordern, dafs diese nur in denjenigen Raumformen gelten, die in allen ihren Eigenschaften mit der Erfahrung vereinbar sind. Die neuen Axiome dürfen daher a) den allgemeinen Grundsätzen nicht widersprechen, b) keine blofse Folge aus ihnen sein, müssen c) selbst der Erfahrung genügen, und d) nur solchen Raumformen zukommen, die in allen ihren Eigenschaften mit der Erfahrung übereinstimmen. Zugleich mufs unser Bestreben darauf gerichtet sein, die Zahl der neu einzuführenden Voraussetzungen möglichst zu beschränken.

2. Der Aufstellung der neuen Axiome[32]) schicken wir mehrere Erklärungen voraus. Wir sagen, eine dreidimensionale Raumform habe freie Beweglichkeit, wenn es bei der Ruhe eines Punktes noch möglich ist, jede durch ihn gehende Linie oder Fläche aus ihrer Anfangslage zu entfernen. In diesem Falle mufs es möglich sein, jede Linie und Fläche, die durch einen festen Punkt geht, bei der Drehung um diesen Punkt in eine von der Anfangslage verschiedene Lage zu bringen. Wir müssen also erstens den Fall ausschliefsen, dafs mit einem Punkt jedesmal die sämtlichen Punkte einer Linie oder einer Fläche, auf der der Punkt liegt, in Ruhe gehalten werden, und zweitens dürfen wir nicht gestatten, dafs bei allen dann noch möglichen Bewegungen eine solche Linie oder eine solche Fläche regelmäfsig in sich verschoben wird. Für jede vom ruhenden Punkte ausgehende Linie gelten daher die beiden Gesetze, dafs bei einer gewissen Drehung diese Linie einen Flächenteil beschreibt, und dafs bei einer andern Drehung

um denselben Punkt der durch die erste Drehung gewonnene Flächenteil einen Raumteil beschreibt.

Der freien Beweglichkeit legen wir den niedrigsten Grad bei, wenn der Raum aufser der soeben aufgestellten Forderung noch der weiteren Bedingung genügt, dafs bei der Ruhe eines Punktes kein zweiter alle Lagen innerhalb eines Raumteiles erhalten kann. Für eine dreidimensionale Raumform, welche freie Beweglichkeit im niedrigsten Grade besitzt, gelten demnach folgende Gesetze:

a) Läfst man einen Punkt in Ruhe und konstruiert man irgend eine Linie oder Fläche, welche durch den ruhenden Punkt hindurchgeht, so giebt es stets eine Bewegung, bei der diese Linie oder Fläche ihre Anfangslage verläfst.

b) Bei der Ruhe eines Punktes kann jeder zweite Punkt im allgemeinen noch in einer Fläche bewegt werden.

Die Richtigkeit des zweiten Gesetzes erkennt man auf folgendem Wege. Man ziehe vom ruhenden Punkte π aus irgend eine Kurve c. Dafs bei der Drehung um π kein Punkt dieser Kurve in alle Lagen gebracht werden kann, welche einem gewissen Raumteil angehören, folgt unmittelbar daraus, dafs wir der Beweglichkeit den niedrigsten Grad beigelegt haben. Wofern sich aber jeder ihrer Punkte nur auf einer einzigen Linie l bewegen kann, mufs jede Linie l bei allen Drehungen um den Punkt π in sich verschoben werden; die Fläche, auf der alle auf diese Weise erhaltenen Linien l liegen, kann also bei der Ruhe von π ihre Anfangslage nicht verlassen.

Jetzt beschränken wir uns auf diejenigen Raumformen, welche 1. drei Dimensionen haben und 2. freie Beweglichkeit vom niedrigsten Grade besitzen; wir wollen beweisen, dafs eine Raumform, für welche diese Forderungen erfüllt werden, allen unseren Erfahrungen genügt.

Wollen wir die neu hinzugefügten Voraussetzungen nochmals im einzelnen aufzählen, so können wir die folgenden Axiome aufstellen:

I. Der Raum hat drei Dimensionen.

II. Bei der Ruhe eines Punktes kann man jede durch ihn gelegte Linie oder Fläche noch so bewegen, dafs sie ihre Anfangslage verläfst.

III. Wird ein Punkt eines Körpers in Ruhe gehalten, so

kann kein zweiter Punkt des Körpers alle Lagen erhalten, die einem Raumteile angehören.

Wir behaupten, dafs jede Raumform, in der diese Gesetze gelten, entweder parabolisch oder elliptisch oder hyperbolisch ist.

3. Dem Nachweise schicken wir einige kurze Bemerkungen voraus. Zunächst erinnern wir daran, dafs unsere Axiome durch die Erfahrung gefordert werden. Über die Dreizahl der Dimensionen haben wir uns schon öfters, namentlich im ersten Bande (S. 267—270) ausgesprochen. Die Berechtigung der weiteren Annahmen brauchen wir wohl nicht näher zu begründen. Es würde nicht schwer sein, sie in einer Form auszusprechen, bei der wir von den Grenzgebilden (Fläche, Linie und Punkt) gar keinen Gebrauch machen; indessen glauben wir, davon Abstand nehmen zu können.

Was die gebrauchten Ausdrücke betrifft, so wolle man beachten, dafs wir uns von vornherein auf solche Punkte beschränken, die in einem gewissen Bereiche liegen, und dafs wir ihnen reelle Koordinaten beilegen. Wir brauchen daher die Gültigkeit der Axiome nicht, wie Lie, eigens auf einen endlichen Bereich einzuschränken; auch haben wir weder die Realität der Variabeln noch die allgemeine Lage der Wertsysteme ausdrücklich hervorzuheben. Die sachliche Vergleichung der Lieschen Axiome mit den unsrigen behalten wir uns für eine spätere Stelle vor.

4. Jetzt gehen wir zum Beweise über, den wir auf analytischem Wege führen wollen. Dabei müssen wir, wie das erste Axiom verlangt, eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu Grunde legen. Der vierte Grundsatz nötigt uns, die Transformations-Gruppe, durch welche alle Bewegungen dargestellt werden, als transitiv vorauszusetzen; dagegen können wir von vornherein nicht wissen, ob die Gruppe endlich oder unendlich ist. Da bei der Drehung um einen Punkt ein zweiter Punkt noch alle Lagen auf einer Fläche (oder wenigstens auf einem Flächenteile), aber nicht alle Lagen in einem Raumteile annehmen kann, so mufs zwischen zwei Punkten eine, und zwar eine einzige Invariante bestehen. Wenn nämlich erst für drei Punkte eine Invariante existierte, so würde bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter noch mit allen Lagen zur Deckung gebracht werden können, die einen Raumteil anfüllen; gäbe es aber zwei verschiedene Invarianten

zwischen zwei Punkten, so wäre bei der Drehung um einen Punkt die Lage eines jeden anderen Punktes auf eine Linie beschränkt. Demnach läfst die zu der Raumform gehörende Gruppe eine einzige Funktion

$$J\,(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y_1,\ y_2,\ y_3)$$

zwischen zwei beliebigen Wertsystemen (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) ungeändert. Wir wissen aber keineswegs, ob dies die einzige wesentliche Invariante der Gruppe ist, oder ob zwischen mehr als zwei Wertsystemen noch invariante Beziehungen bestehen, die von der angegebenen unabhängig sind.

5. Es ist jetzt unsere Aufgabe, aus denjenigen Gruppen, in denen zwischen zwei Wertsystemen eine invariante Beziehung besteht, diejenigen auszuwählen, welche unseren Axiomen genügen. Dabei dürfen wir auf die in § 4 gefundenen Resultate zurückgehen. Wir müssen nur annehmen, dafs, wofern es mehrere Invarianten für unendlich benachbarte Punkte gäbe, doch die dort gefundene Form wenigstens für eine unter ihnen gewahrt bliebe. Thun wir dies, so belehrt uns das Schlufsergebnis von § 4, dafs die Invariante entweder in der Form $L^{\lambda} M^{\mu} N^{\nu}$ oder in der Form $L^{\lambda} M^{\mu} e^{\mu \frac{N}{M}}$ oder in der Form $L^{\lambda} Q$ erscheint, wo L, M, N lineare Formen der Differentiale sind und Q in ihnen vom zweiten Grade ist, und wo die Exponenten λ, μ, ν auch von den Variabeln x_1, x_2, x_3 unabhängig sind. Wenn $\mu = \nu = 0$ ist, so ist die lineare Form $L = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ die Invariante. Die Verbindung der Resultate, zu denen wir in § 5, 4 und 5 geführt sind, zeigt uns, dafs alsdann bei der Drehung um einen Punkt eine durch den ruhenden Punkt gehende Fläche in sich verschoben wird. Sind aber zwei der Exponenten λ, μ, ν oder alle drei von null verschieden, so können bei der Ruhe eines Punktes nach § 5, 7 mindestens zwei durch den Punkt gelegte Flächen nur so bewegt werden, dafs sie in Deckung mit der Anfangslage verbleiben. Der Fall, dafs diese Flächen reell sind, mufs von vornherein ausgeschlossen werden. Wenn aber für reelle Variabele x_1, x_2, x_3 die Differentialgleichung (13) in § 5 für $C'' = 0$ nur durch komplexe Funktionen befriedigt wird, so müssen diese einander konjugiert sein; die Flächen, welche durch das Verschwinden der einzelnen Bestandteile dargestellt werden, behalten dann ihre

Anfangslage nicht bei; aber, wie man leicht sieht, haben sie eine reelle Linie gemeinschaftlich, und diese wird nur noch in sich verschoben, sobald man einen ihrer Punkte in Ruhe läfst. Da aber durch jeden Punkt des Raumes eine derartige Linie hindurchgeht, so müssen wir auch diesen Fall ausschliefsen. Dieselbe Betrachtung läfst sich anwenden, wenn unter den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 zwei konjugiert komplex sind. Unseren Voraussetzungen genügt also keine Invariante, welche für unendlich benachbarte Wertsysteme in der ersten oder zweiten Form erscheint, welche also in den Differentialen nur Formen ersten Grades enthält.

6. Demnach nimmt die Invariante die Form $L^\lambda Q$ an, wo L eine lineare, Q eine quadratische Form in den Differentialen ist. Auch dürfen wir annehmen, dafs Q eine eigentliche Form zweiten Grades darstellt, weil wir sonst auf den soeben erledigten Fall kämen. Aus den in § 6 gefundenen Gruppen sind diejenigen sofort auszuschliefsen, welche keine Invariante zwischen zwei Wertsystemen besitzen. Dann bleiben die folgenden übrig:

(1) $p_1,\ p_2,\ p_3;\ c_1 p_1 x_1 + c_2 p_2 x_2 + c_3 p_3 x_3,\ e_1 p_1 x_2 + e_2 p_2 x_3;$

(2) $p_1,\ p_2,\ p_3,\ 2x_1 p_1 + x_2 p_2,\ 2x_1 p_2 + x_2 p_3,\ 4x_1^2 p_1 + 4x_1 x_2 p_2 + x_2^2 p_3;$

(3) $x_0 p_1,\ x_0 p_2,\ x_0 p_3,\ x_2 p_3 - x_3 p_2,\ x_3 p_1 - x_1 p_3,\ x_1 p_2 - x_2 p_1,$ wo ist $x_0 = \sqrt{1 - k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$.

Bei der Herleitung ist ausdrücklich vorausgesetzt, dafs das Wertsystem (0, 0, 0) analytisch keinem Ausnahme-Gebilde angehört; wir dürfen daher, um die allgemeinen Gesetze für die Drehung um einen Punkt zu ermitteln, den Nullpunkt als ruhend voraussetzen. Dieser Festsetzung entspricht es, bei der dritten Gruppe das Gebiet so abzugrenzen, dafs in ihr die Hilfsgröfse x_0 einen positiven Wert hat; für $k = 0$ ist überhaupt $x_0 = 1$.

Legen wir jetzt die erste oder die zweite Gruppe zu Grunde, so finden wir, dafs bei der Drehung um den Nullpunkt die Fläche $x_1 = 0$ in sich verbleibt. Da wir aber in diesen beiden Gruppen alle Variabeln als reell voraussetzen müssen, so sehen wir, dafs bei der Ruhe eines Punktes eine durch ihn hindurchgehende Fläche in sich verschoben wird; diese beiden Gruppen entsprechen also unseren Axiomen nicht.

7. Wir haben nur noch die letzte Gruppe zu untersuchen. Dafs diese für reelle Werte von x_1, x_2, x_3, wo auch k reell sein mufs, allen unseren Forderungen genügt, leuchtet sofort ein. Es fragt sich nur, ob nicht zwei der Variabeln konjugiert komplex sein dürfen. Nun bleibt bei der Drehung um den Nullpunkt offenbar jede Fläche, deren Gleichung ist:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{Const.}$$

in Deckung mit ihrer Anfangslage. Sind hier aber die Variabeln x_2 und x_3 konjugiert komplex, so kann man leicht reelle Variabele y_1, y_2, y_3, welche mit x_1, x_2, x_3 zugleich verschwinden, derartig einführen, dafs die vorstehende Gleichung die Form annimmt:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \text{Const.}$$

Speciell wird die Fläche $y_1^2 + y_2^2 = y_3^2$ bei allen Drehungen um den Nullpunkt in sich bewegt. Da diese Fläche aber durch den ruhenden Punkt geht, genügt diese Möglichkeit unseren Voraussetzungen nicht. Wir dürfen daher den Variabeln x_1, x_2, x_3 und der Konstanten k nur reelle Werte beilegen. Nun macht es geometrisch einen Unterschied, ob die Konstante k positiv, negativ oder gleich null ist. Demnach sind nur die elliptische, die hyperbolische und die parabolische Geometrie geeignet, unsere Axiome zu befriedigen.

8. Die im Anfange dieses Paragraphen angegebene Formulierung setzt von vornherein die Zahl der Dimensionen gleich drei fest. Wollen wir auch den mehrdimensionalen Raum berücksichtigen, so müssen wir entweder unsere Fassung in entsprechender Weise ändern oder auf die Liesche Fassung zurückgehen. Wir begnügen uns mit der letzteren, da es uns nur darauf ankommt, einen Unterschied zwischen dem Raume von drei und von vier Dimensionen anzugeben. Suchen wir eine neue Lösung des Problems für den mehrfach ausgedehnten Raum, so werden wir gut thun, den Begriff der »freien Beweglichkeit vom niedrigsten Grade« zu übertragen. Danach legen wir einer n-dimensionalen Raumform freie Beweglichkeit bei, wenn bei der Ruhe eines Punktes jedes durch den Punkt gelegte Grenzgebilde (von einer bis zu $n - 1$ Dimensionen) gezwungen werden kann, seine Anfangslage zu verlassen. Wollte man jetzt den niedrigsten Grad der freien Beweglichkeit dadurch charakterisieren, dafs bei der

Ruhe eines Punktes kein zweiter in alle ein n-dimensionales Gebiet anfüllende Lagen gelangen kann, so würde die freie Beweglichkeit vom niedrigsten Grade noch anderen Raumformen als den eigentlichen zukommen. Um das zu erkennen, betrachten wir die siebengliedrige Gruppe in vier Variabeln, welche aus den infinitesimalen Transformationen hervorgeht:

$$(4)\quad \begin{aligned} &p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ x_1p_2 - x_2p_1 + x_3p_4 - x_4p_3,\\ &x_1p_3 - x_3p_1 + x_4p_2 - x_2p_4,\ x_1p_4 - x_4p_1 + x_2p_3 - x_3p_2. \end{aligned}$$

Alle bei der Ruhe des Nullpunktes möglichen Bewegungen entsprechen der Gruppe, welche durch die drei letzten infinitesimalen Transformationen (4) erzeugt wird. Um die hierzu gehörenden endlichen Transformationen anzugeben, gehen wir von vier reellen Gröfsen a_1, a_2, a_3, a_4 aus, welche durch die Gleichung:

$$(5)\quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$$

mit einander verbunden sind, und setzen:

$$(6)\quad \begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4\\ y_2 &= - a_2x_1 + a_1x_2 + a_4x_3 - a_3x_4\\ y_3 &= - a_3x_1 - a_4x_2 + a_1x_3 + a_2x_4\\ y_4 &= - a_4x_1 + a_3x_2 - a_2x_3 + a_1x_4. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dafs

$$(7)\quad \Sigma y_\iota^2 = \Sigma x_\iota^2$$

ist. Variiert man aber die Parameter $a_1 \ldots a_4$ unter der durch die Gleichung (5) geforderten Bedingung:

$$a_1\delta a_1 + a_2\delta a_2 + a_3\delta a_3 + a_4\delta a_4 = 0, \text{ so darf man setzen:}$$

$$\delta a_1 = a_2\varkappa + a_3\lambda + a_4\mu,\quad \delta a_2 = - a_1\varkappa + a_4\lambda - a_3\mu,$$

$$\delta a_3 = - a_4\varkappa - a_1\lambda + a_2\mu,\quad \delta a_4 = a_3\varkappa - a_2\lambda - a_1\mu,$$

wo $\varkappa$, λ, μ unendlich kleine Gröfsen sein sollen. Diese Werte für $a_\nu + \delta a_\nu$ setze man in die Gleichungen (6) ein, indem man die der Anfangslage entsprechenden Koordinaten (x) unverändert läfst, aber y_ν durch $y_\nu + \delta y_\nu$ ersetzt; dadurch erhält man

$$\delta y_1 = - \varkappa y_2 - \lambda y_3 - \mu y_4,\quad \delta y_2 = \varkappa y_1 + \lambda y_4 - \mu y_3,$$

$$\delta y_3 = - \varkappa y_4 + \lambda y_1 + \mu y_2,\quad \delta y_4 = \varkappa y_3 - \lambda y_2 + \mu y_1,$$

was mit den drei letzten Symbolen (4) übereinstimmt. Somit sind die Gleichungen (6) die endlichen Transformationen, durch welche die Drehungen um den Nullpunkt dargestellt werden.

Aus den Gleichungen (6) gehen folgende Beziehungen hervor:

$$a_1 \Sigma x_\nu^2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

$$a_2 \Sigma x_\nu^2 = - x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3$$

$$a_3 \Sigma x_\iota^2 = - x_1 y_3 + x_2 y_4 + x_3 y_1 - x_4 y_2$$
$$a_4 \Sigma x_\iota^2 = - x_1 y_4 - x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1.$$

Läfst man also einem festen Wertsystem (x) irgend ein Wertsystem (y) entsprechen, welches nur der Bedingung (7) genügt, so ergeben sich vermittelst der vorstehenden Gleichungen die Koefficienten $a_1 \ldots a_4$ in der Weise, dafs die Beziehung (5) befriedigt wird. Die Untergruppe gestattet demnach, einen Punkt (x) in einen Punkt (y) überzuführen, wofern nur für ihre Koordinaten die Summe der Quadrate denselben Wert besitzt. Jede vom Nullpunkt ausgehende Linie kann bei der Ruhe desselben noch so bewegt werden, dafs sie einen (vierdimensionalen) Raumteil beschreibt. Bei der Drehung um einen Punkt kann man somit jedes durch ihn hindurchgelegte Grenzgebilde so bewegen, dafs es seine Anfangslage verläfst. Für vier Dimensionen genügt es hiernach nicht, vorauszusetzen, dafs bei der Ruhe eines Punktes jeder andere Punkt alle Lagen in einem dreidimensionalen Grenzgebilde annehmen kann, und dafs kein Grenzgebilde, das durch den ruhenden Punkt geht, bei allen Drehungen in Deckung mit seiner Anfangslage verbleibt.

§ 11.

Rückblick.

Schon im dritten Abschnitt (B. 1. S. 176—178) haben wir auf Grafsmanns Ausdehnungslehre hingewiesen und in ihr einen recht umfassenden Wissenszweig kennen gelernt, der die Geometrie Euklids als speciellen Teil einschliefst und der direkt auf die euklidischen Raumformen von einer beliebig hohen Zahl von Dimensionen führt, während darin die Riemannschen Raumformen ebenfalls ihre Stelle finden. Indem wir den Raumbegriff in derjenigen Weise erweitert haben, die in § 10 des siebenten Abschnitts durchgeführt ist, haben wir blofs das zum vollen Abschlufs gebracht, was Grafsmann vor mehr als fünfzig Jahren angebahnt hatte.

Indessen beruht die Bedeutung der Ausdehnungslehre hauptsächlich in den eigentümlichen Methoden, vermittelst deren es ihr möglich wird, nicht nur weite Partieen der Geometrie, sondern auch schwierige Probleme der Analysis auf eine einheitliche und übersichtliche Weise zu bewältigen. Dennoch gewährt es einiges

Interesse, zu sehen, dafs sie in ihren Grundlagen manche Ähnlichkeit zeigt mit einem System, welches Veronese vor wenigen Jahren aufgestellt hat (VII § 9 S. 294 ff.). Zwar haben wir der Art und Weise, in welcher der italienische Mathematiker die Geometrie begründet, und die er als die allein berechtigte hinstellen möchte, aus vielen Gründen nicht zustimmen können. Ganz abgesehen von den schweren Bedenken gegen seine unendlich grofsen und unendlich kleinen Segmente können wir der allgemeinen Einführung der Gleichheit in seinem Sinne nicht beipflichten. Dennoch haben wir die Bedeutung seines Werkes recht hoch anschlagen müssen. Indem Veronese in jeder Figur je zwei Punkte durch eine gerade Strecke verbindet und die daraus entstehende neue Figur der Untersuchung zu Grunde legt, gelingt es ihm, eine einheitliche Methode zu schaffen, die ihm sogar gestattet, kongruente und symmetrische Figuren zu unterscheiden, ohne die Bewegung zu benutzen. Veronese legt dem Raum an sich unendlich viele Dimensionen bei; der n-dimensionale Raum für jede Zahl n ist für ihn blofs eine Figur im allgemeinen Raume. Wäre er in gleicher Weise von einem allgemeineren Begriff der Gleichheit ausgegangen, so würde er nicht gezwungen worden sein, sich auf einzelne Raumformen zu beschränken, die weder theoretisch noch für die Erfahrung vor den von ihm ausgeschlossenen einen Vorzug besitzen.

Auch Tillys Versuch (VII § 8. S. 208 ff.) kann als befriedigend nicht angesehen werden, darf aber keineswegs vollständig verworfen werden. Der wesentlichste Punkt seines Hauptaxioms besteht in der Forderung, dafs die Abstandsfunktion zweier Punkte nur dann gleich null wird, wenn die Punkte zusammenfallen. Dadurch tritt dasselbe in enge Beziehung zu den Voraussetzungen, die wir in VIII § 10 zu Grunde gelegt haben; somit bietet auch sein Aufbau Anknüpfungspunkte mit den allgemeinen Ideen, von denen wir ausgegangen sind.

Das »Experiment«, vermittelst dessen Überweg (VII § 7. S. 204) eine einheitliche Grundlage für die Geometrie glaubt schaffen zu können, kann nicht als ausreichend angesehen werden; wie nahe es aber bereits an die Wahrheit herankommt, zeigt die Ähnlichkeit mit den »Thatsachen«, die nach Helmholtz' Ansicht der Geometrie zum Grunde liegen.

Die von Wundt aufgestellte Definition des Raumes (VII § 6) ist nicht streng; auch wird es nie gelingen, von ihr aus die fundamentalen Eigenschaften des Raumes zu beweisen. Dennoch müssen wir dem zu Grunde liegenden Gedanken unbedingt zustimmen. Wundt geht von Begriffen aus, die in ihrer weiteren Bedeutung über alles Räumliche hinausreichen; er sucht sie aber in solcher Weise zu verbinden und dadurch zu beschränken, dafs der neue Begriff mit dem des Raumes zusammenfällt. Dies Verfahren kommt im Wesen ganz auf dasjenige hinaus, welches wir in den letzten Paragraphen eingeschlagen haben. Unseren allgemeinen Raumformen liegen Begriffe zu Grunde, welche durchaus nicht auf den Raum beschränkt sind, da den Grundsätzen, wenngleich sie zuvörderst durch räumliche Abstraktionen gewonnen sind, an sich nichts Räumliches anhaftet. Das von uns gewählte Wort Raumform thut, wie aus den beigefügten Erläuterungen hervorgeht, nichts zur Sache, da wir diese Wahl nur getroffen haben, um anzudeuten, dafs unter allen Wissenszweigen, denen diese Bezeichnung beigelegt werden kann, der Raum (im wahren Sinne) der wichtigste ist. Demnach kommt Lies Fassung des von ihm nach Riemann und Helmholtz benannten Problems im wesentlichen auf die Aufgabe hinaus, die sich Wundt bei seiner Definition stellt; es handelt sich ja in beiden Fällen nur darum, eine derartige Verknüpfung allgemeinerer Begriffe zu finden, dafs der neu gewonnene Begriff mit dem des Raumes identisch wird. Vielleicht tritt die Übereinstimmung zwischen den beiden Problemen bei der in VIII § 10 angegebenen Formulierung noch deutlicher hervor.

Wir dürfen jedoch in diesen Erörterungen nicht weiter gehen, ohne uns auf den Boden der Philosophie zu begeben, den wir glauben hier nicht betreten zu sollen. Demnach wenden wir uns den übrigen Untersuchungen zu, welche in den beiden letzten Abschnitten angestellt sind. Auf die Darlegungen über Winkel, Gerade und Ebene gehen wir nicht nochmals ein, weil sie nur orientieren sollen und nicht als abschliefsend angesehen werden können. Im zehnten Paragraphen des siebenten Abschnitts haben wir ein System von Begriffen und Sätzen aufgestellt, von dem wir glauben, dafs es eine geeignete Grundlage für die Geometrie bildet. Aber diese Grundsätze werden aufser dem Raume auch

von sehr vielen anderen Wissenszweigen befriedigt; jedes System von Begriffen und Urteilen, für das dieselben gelten, wurde als Raumform im uneigentlichen Sinne bezeichnet (VII § 11). Wir haben noch die Grenzgebilde allgemein definiert; im übrigen begnügten wir uns damit, an einigen Beispielen zu zeigen, dafs unsere Grundsätze keineswegs auf den Raum (im eigentlichen Sinne) beschränkt sind. Für den weiteren Fortschritt aber glaubten wir die Hilfe der Analysis in Anspruch nehmen zu sollen. Indessen stellt sich uns hier eine grofse Schwierigkeit entgegen.

Zwar hat man schon seit langem die Analysis benutzt, um geometrische Eigenschaften aufzufinden und zu begründen. Aber bei der analytischen Geometrie sowohl des euklidischen wie der nicht-euklidischen Räume (im engern Sinne) pafst man die Koordinaten den einzelnen Raumformen eng an, damit ihre Eigentümlichkeiten durch die Formeln schon zum deutlichen Ausdruck kommen. In einer solchen Weise kann man aber die Koordinaten erst aufstellen, wenn man die charakteristischen Eigenschaften der Raumform kennt. Demnach ist dieser Weg hier ausgeschlossen, da die einzelnen Raumformen erst aufgefunden werden sollen. Wir müssen daher, wenn der Ausdruck gestattet ist, ein Koordinatensystem zu Grunde legen, das sich für alle Raumformen in gleicher Weise eignet. Haben wir schon im fünften Abschnitt gesehen, welche Schwierigkeiten die Messung in der euklidischen Geometrie selbst dann noch bietet, wenn man ihre Eigenschaften als bekannt voraussetzt, so kann man ermessen, dafs der Übergang von den allgemeinen Grundsätzen zur analytischen Darstellung nicht einfach sein kann.

Andererseits besitzt die rechnende Methode ganz besondere Vorzüge. Fast bei allen Versuchen, die bisher angestellt sind, um von wenigen Annahmen aus durch blofse Überlegung zu den ersten Sätzen der Geometrie zu gelangen, hat man, ohne es zu bemerken, mehr in die Voraussetzungen hineingelegt, als sie wirklich enthalten. Diese Wahrnehmung machten wir schon auf den ersten Seiten des ersten Bandes, als wir die angeblichen Beweise des Parallelaxioms besprachen. An demselben Mangel kranken nahezu ohne Ausnahme die bisher angegebenen Methoden, die Existenz der Geraden und der Ebene aus der der Kugel herzuleiten. Dieser Fehler trat uns auch in Überwegs und Tillys

Arbeiten (VII § 7 u. 8) entgegen. Bei der analytischen Behandlung ist man in einer weit günstigeren Lage, weil im Verlaufe der Rechnung kein neues Moment hinzutreten kann. Das durch eine fehlerlose analytische Herleitung gewonnene Resultat stützt sich auf diejenigen Voraussetzungen, welche der Rechnung selbst zu Grunde liegen. Ein Fehler in einem analytisch durchgeführten Beweise wird, sobald er einmal nachgewiesen ist, allgemein anerkannt; dagegen ist es schwer, jemanden davon zu überzeugen, dafs sich in seine begriffliche Entwicklung fremde Bestandteile eingemischt haben.

Von diesem Gesichtspunkte aus ist es nur zu billigen, dafs Riemann und Helmholtz ohne vorangehende Prüfung auf die vorliegende Frage die Analysis anwandten und dafs andere ihnen hierin nachgefolgt sind. Andererseits mufs man wünschen, die Erlaubtheit der Rechnung in aller Strenge begründen zu können, wie dies in der euklidischen Geometrie von jeher Sitte gewesen ist. Da aber die Schwierigkeit dieser Aufgabe sehr grofs ist, haben wir einen Mittelweg eingeschlagen, indem wir nur die leitenden Gedanken angaben, ohne sie nach allen Richtungen hin durchzuführen. Auf diese Weise hofften wir dem Leser einen Einblick in die wesentlichsten Punkte zu ermöglichen, ohne seine Geduld zu sehr in Anspruch zu nehmen. Dabei mufsten wir ausdrücklich zwei Voraussetzungen beifügen, die sich unseren Grundsätzen in etwa anpassen, ihnen aber nicht nahe genug stehen, um ihnen zugezählt zu werden. Der angedeutete Beweis läfst sich aber erst dann zum vollen Abschlufs bringen, nachdem gewisse Untersuchungen, zu denen G. Cantor und Peano den Grund gelegt haben, und die im ersten Bande (S. 168—172) erwähnt worden sind, eine Fortentwicklung gefunden haben. Aber selbst bei der unvollendeten Form, in der die Herleitung geboten wurde, tritt die nahe Beziehung der allgemeinen Raumformen zu den Lieschen Transformations-Gruppen deutlich zu Tage. Wir sind also berechtigt, die Theorie dieser Gruppen für unsern Zweck anzuwenden. Nur dürfen wir nicht vergessen, dafs die Herleitung der Grundgesetze für die Transformations-Gruppen mehrfach von Differentiationen Gebrauch macht; demnach müssen wir endlich noch annehmen, dafs die auftretenden Funktionen die ersten und zweiten Differentialquotienten nach den Variabeln besitzen.

Der Nachweis derjenigen Sätze, auf denen die Theorie der Transformations-Gruppen beruht, ist nicht so einfach, dafs wir ihn hätten aufnehmen können. Wir mufsten uns also damit begnügen, diese Sätze in VIII § 1 rein historisch mitzuteilen, ohne in ihre Begründung einzugehen, und sie in § 2 durch Beispiele zu erläutern. Vielleicht wäre es besser gewesen, das ganze Gebäude in dem von Lie entwickelten Umfange als bekannt vorauszusetzen; dann hätten die Beweise an Einfachheit und vielleicht an Strenge gewonnen. Zu einem solchen Verfahren haben wir uns aber nicht entschliefsen können und es vorgezogen, alle Sätze, deren wir weiter benötigten, in den §§ 3—6 herzuleiten. Dadurch wurden wir befähigt, die in § 10 angegebene Charakterisierung bei der Beschränkung auf drei Variabele zu beweisen; auch konnten wir die Mängel würdigen, welche Lie in Helmholtz' Beweisverfahren gefunden hat; nur mufsten wir darauf verzichten, Lies Begründung seiner Axiome wiederzugeben.

Die Anwendung der Transformations-Gruppe für unsere Theorie kann sich nach drei verschiedenen Richtungen hin erstrecken: an erster Stelle kann man von einer einzelnen Gruppe ausgehen und die ihr entsprechende Raumform untersuchen; zweitens könnte man versuchen, mit Hilfe der Transformations-Gruppen einen Überblick über alle Raumformen zu gewinnen; man kann drittens verschiedene Klassen von Raumformen mit einander vergleichen. Aufgaben der ersten Art haben wir mehrfach erledigt, indem wir die Eigenschaften einer Raumform vermittelst der zugehörigen Gruppe hergeleitet haben. Die zweite Aufgabe aber ist zu umfassend, als dafs sie, abgesehen von der Unmöglichkeit, sie mit den jetzt gebotenen Hilfsmitteln zu bewältigen, von uns hätte in Angriff genommen werden können. Was die dritte Art von Problemen betrifft, so erinnern wir unter anderem daran, dafs die Theorie der Transformations-Gruppen zuweilen Raumformen, die scheinbar ganz verschiedener Natur sind, eng mit einander verknüpft. Betrachtet man z. B. statt des Punktes die Gerade oder die Ebene als Element im dreidimensionalen euklidischen Raume, so erhalten wir zwei neue Raumformen; ihre Verwandtschaft mit der ursprünglich gegebenen tritt uns analytisch in der Gleichartigkeit des Baues der zugehörigen Transformations-Gruppen entgegen. Auch die parabolische, elliptische und

hyperbolische Geometrie dürfen, wie wir an zahlreichen früheren Stellen erkannt haben, als Glieder einer einzigen Klasse betrachtet werden. Schon der erste Band hat uns gezeigt, dafs wir ihrer analytischen Untersuchung dieselben Formeln zu Grunde legen dürfen, wofern wir darin eine gewisse Konstante, das Riemannsche Krümmungsmafs, aufnehmen; einem positiven Werte dieser Konstante entspricht die elliptische, einem negativen die hyperbolische Geometrie, während diese Konstante für die parabolische Geometrie den Wert null annimmt. Auch die zu diesen drei Raumformen gehörenden Gruppen kann man einheitlich darstellen, sobald man diese Konstante benutzt.

Unter den Problemen der dritten Klasse besitzt eins ganz hervorragende Wichtigkeit, nämlich die Aufgabe, die drei eigentlichen Raumformen allen anderen gegenüber zu charakterisieren. In dieser Hinsicht sind noch immer von hoher Bedeutung die Arbeiten von Helmholtz (VIII § 8) trotz der Mängel, die Lie in ihnen nachweisen konnte. Lie selbst hat uns mit zwei Lösungen (VIII § 9) bekannt gemacht, die beide grofse Vorzüge besitzen. Seine Axiome sind zunächst einfacher als die von Helmholtz aufgestellten; sie reichen zudem vollständig aus, während jene noch Möglichkeiten zulassen, die ausgeschlossen werden sollen; endlich genügt Lies Beweisverfahren den Anforderungen der Strenge in vollem Mafse. Auch gelingt es ihm, seine Axiome und seine Beweise auf jede beliebige Zahl von Dimensionen zu übertragen.

Was uns an Lies Axiomen weniger gefällt, ist der gänzliche Mangel an Anschaulichkeit; die analytische Seite tritt vor der geometrischen gar zu sehr hervor. Seine Voraussetzungen für den dreidimensionalen Raum an der Erfahrung zu prüfen, ist selbst bei seiner zweiten Lösung ausgeschlossen. Bei seiner ersten Lösung, wo er nur mit Linien- und Flächenelementen operiert, fällt die geometrische Deutung ganz weg; aber es dürfte sogar schwer sein, in exakter Weise die Bedeutung der Axiome nach ihrer rein analytischen Seite hin anzugeben. Diese Aufgabe kann erst dann für erledigt angesehen werden, wenn die in dem Worte »Element« bezw. »unendlich klein« liegenden Grenzübergänge deutlich beschrieben sind. Das ist wenigstens bis jetzt noch nicht geschehen.

Deshalb haben wir geglaubt, im letzten Paragraphen wenigstens

für drei Dimensionen ein System von Axiomen angeben zu sollen, das sich der Erfahrung durchaus anschliefst. Es ist sogar möglich, die neuen Voraussetzungen in einer Form auszusprechen, bei der die Worte Punkt, Linie und Fläche ganz vermieden werden und bei der nur von der Bewegung fester Körper die Rede ist; indessen haben wir es nicht für nötig gehalten, dies durchzuführen.

In einem Punkte verlangen allerdings unsere Axiome mehr als die Lieschen; wir setzen nämlich die Transitivität der Gruppe von vornherein voraus, während sie von Lie aus seinen Voraussetzungen hergeleitet wird. Dafs hierin bei unserm Ausgangspunkte keine Beschränkung liegt, ist sofort klar. Indessen haben wir ausdrücklich unsere Grundsätze nur als erlaubt, nicht als notwendig hingestellt. Man könnte daher denken, dafs man bei einem anderen Verfahren auch auf Raumformen geführt würde, denen intransitive Gruppen genügten. Aber das ist ausgeschlossen, weil die Aufstellung von Koordinaten irgend eine Messung voraussetzt, diese aber nur möglich ist, wenn die sämtlichen Wertsysteme eines Bereiches zu einander in Beziehung treten können, was bei den intransitiven Gruppen ausgeschlossen ist. Wir vermögen es daher nicht als einen wirklichen Vorzug anzusehen, dafs Lie die Transitivität nicht in die Axiome aufgenommen hat.

Zum Schlufs möge noch folgende Bemerkung gestattet sein. Lie glaubt, durch seine erste Lösung das Problem für jede beliebige Zahl von Dimensionen endgültig erledigt zu haben; dasselbe möchte er für den dreidimensionalen Raum in gewissem Sinne auch von seiner zweiten Lösung behaupten, während er für eine gröfsere Zahl von Dimensionen nur zeigen will, dafs seine Voraussetzungen ausreichen, aber der Ansicht hinneigt, dafs sie noch überflüssige Elemente enthalten. Demgegenüber glaube ich, dafs die einfachste Lösung des vorliegenden Problems überhaupt noch nicht gefunden ist, und dafs es sich durchaus lohnt, nach einfacheren Axiomen zu suchen. Doch kann hier nicht der geeignete Ort sein, auf die Begründung meiner Ansicht einzugehen.

Litteratur-Nachweis.

[1]) V § 3. S. 9. Burkhardt, Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Göttinger Berichte 1895 Heft 1.

[2]) V § 4. S. 15. Die hier aus Proklus mitgeteilte Stelle findet sich in der Friedleinschen Ausgabe auf S. 194, 195; sie ist weitläufig besprochen in zwei Arbeiten, welche Tannery in Darboux' Bulletin B. XVI S. 124 und B. XIX S. 162 veröffentlicht hat; die Lobsprüche, welche Tannery darin dem Apollonius spendet, sind gewifs voll verdient.

Die Theorie der Rektifikation, wie sie hier für den Fall entwickelt wird, dafs die Linie überall Tangenten und Schmiegungsebenen besitzt, dürfte schon lange bekannt sein, ohne dafs sich gerade der erste Begründer angeben läfst. Unsere Darlegung lehnt sich eng an Scheeffer an (allgemeine Untersuchungen über die Rektifikation der Kurven, Acta math. V S. 49—82). Dieser (leider zu früh verstorbene) Geometer betrachtet aber auch den Fall, dafs die Kurve keine Tangenten hat in der Weise, welche im weiteren Verlaufe des Paragraphen mitgeteilt wird. Die gegen seine Theorie von P. du Bois-Reymond (Acta math. VI S. 167) erhobenen Einwände kann ich für begründet nicht anerkennen, wenn auch Pringsheim (Münchener Berichte 1895 S. 55) meint, sie seien bisher nicht widerlegt. Die zum Schlufs des Paragraphen benutzte Funktion ist, wie Sch. selbst angiebt, von Weierstrafs aufgestellt und von G. Cantor in der Arbeit, Condensation der Singularitäten, math. Annalen B. 19, veröffentlicht.

[3]) V § 5. S. 22. Über die Zerlegung flächengleicher Polygone in kongruente Flächen vergleiche man folgende Arbeiten: W. Bolyai, tentamen juventutem . . . introducendi, Maros Vásárhelyini 1832 u. 1833; Gerwien, Zerschneidung flächengleicher Polygone, Crelles Journal B. 10; Göpel, Teilung ebener Figuren, Grunerts Archiv B. 4; Réthy, endlich-gleiche Flächen, math. Ann. B. 38. Man vergleiche auch Paolis, elementi di Geometria, und Stolz, allgem. Arithmetik B. 1.

[4]) V § 5. S. 23. Hierauf dürfte zuerst der Verf. hingewiesen haben, und zwar in einer Anzeige von Stolz' Arithmetik I (Schlömilchs Zeitschrift) und in seinen »nicht euklidischen Raumformen« (Leipzig 1885). In dem zuletzt genannten Werke ist bereits der hier durchgeführte Beweis kurz skizziert. Demselben Gedanken sind auch zwei kleinere Arbeiten gewidmet, eine von F. Schur, Berichte der Dorpater Naturf.-Gesellschaft, eine zweite von Stolz, Monatshefte für Math. u. Phys., B. 5; beide führen ein neues Axiom ein, ohne die Begründung zu versuchen.

[5]) V § 5. S. 32. Schwarz, sur une définition erronée des surfaces Brief an Hrn. Hermite, mitgeteilt in dessen Cours 1883 und in Schwarz' gesammelten Werken B. II).

[6]) V § 6. S. 35. Auch die hier angegebene Methode, beliebige Körper zu messen, ist die Durchführung eines bereits in meinen »nicht-euklidischen Raumformen« angegebenen Gedankens.

[7]) V § 10. S. 49. Für den Inhalt dieses Paragraphen kommen zahlreiche Arbeiten G. Cantors in Betracht, wenngleich hier nur die ersten Sätze seiner Theorie mitgeteilt werden konnten und alle tieferen Untersuchungen unbeachtet bleiben mufsten. Man vergleiche folgende Arbeiten: Journal für die Math., B. 77, S. 258—262; B. 84, S. 242—258; math. Annalen: B. 4, S. 139—143; B. 5, S. 123—132; B. 15, S. 1—8; B. 17, S. 255—258; B. 20, S. 113—122; B. 21, S. 51—58 u. S. 545—591; B. 23, S. 453—488; B. 46, S. 480—504; B. 49, S. 207—246; Acta math. B. 2, S. 305—414; B. 4, S. 381—392; B. 7, S. 105—124. Die beiden letzten in den Annalen veröffentlichten Arbeiten konnten leider für die vorliegende Skizze nicht mehr benutzt werden.

[8]) V § 11. S. 54. Man vergleiche eine kleine Programmarbeit: Einige Bedenken gegen Veroneses transfinite Zahlen (Münster 1895), sowie die Note: Über transfinite Zahlen, math. Ann. B. 48, S. 425—432.

[9]) V § 12. S. 59. Veronese, Fondamenti di Geometria (Padova 1891), auch in deutscher Übersetzung, besorgt von Schepp (Leipzig 1894); für den Inhalt des Paragraphen vergl. S. 67—166 der italienischen, S. 77—184 der deutschen Ausgabe.

Levi-Cività, Sugli infiniti ed infinitesimi attuali, Atti del R. Istituto Veneto, 1893. Auf einen bedenklichen Punkt der Veroneseschen Theorie weist Cantor, math. Ann. B. 46, S. 500, 501 hin. Hiergegen und gegen meine eben angeführte Programmarbeit wendet sich Veronese in dem Aufsatz: Intorne ad alcune asservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi, math. Ann. B. 47, S. 423—432. Über die Veroneseschen Zahlen handelt auch Schönflies in einem Vortrage, den er auf der Mathematiker-Versammlung 1896 gehalten hat. Wenn Herr Veronese in seiner neuesten Publikation, sul postulato della continuità, Rendiconti dell' Accad. dei lincei, vol. VI p. 161—168, einen Gegensatz zwischen Cantor, Schönflies und mir hinstellt, so dürfte er im Irrtum sein; speciell mit Herrn Cantor stimme ich vollständig überein. Auf den Inhalt dieser Arbeit, die erst nach dem Druck der ersten Bogen meines Buches erschienen ist, brauche ich nicht einzugehen.

[10]) VI § 1. S. 73. Für den Inhalt dieses Paragraphen vergleiche man die früher citierten Arbeiten von Klein über die nicht-euklidische Geometrie im 4., 6. und 7. Bande der math. Annalen, sowie die im ersten Bande unter 6. angeführten Abhandlungen Beltramis. Aufser den angeführten Arbeiten Kleins sind auch seine autographierten Vorlesungen über die nicht-euklidische Geometrie wohl zu beachten; bei der Herausgabe des ersten Bandes standen sie mir nicht zu Gebote und konnten deshalb nicht citiert werden. Ich möchte hier nur erwähnen, dafs diese Vorlesungen auch für die selbständige Begründung der Projektivität von Bedeutung sind.

[11]) VI § 2. S. 81. Staudt, Geometrie der Lage und Beiträge zur Geometrie der Lage; Klein, die früher angeführten Aufsätze. Eine sehr genaue Theorie liefert Pasch in seinen Vorlesungen über die neuere Geometrie (Leipzig 1882), sowie in zahlreichen späteren Aufsätzen, die in den math. Ann. veröffentlicht sind. Weiter vergleiche man: Schur, Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projektive Geometrie, math. Ann. B. 39; Burkhardt, die unter 1. citierte Arbeit, namentlich § 2 derselben.

[12]) VI § 3. S. 112. Das Schlufsresultat dieses Paragraphen war bereits angegeben in § 1 der Arbeit: Zur projektiven Geometrie, math. Ann. B. 43, S. 573 ff.; dort war ausdrücklich die Annahme gemacht, dafs alle projektiven Transformationen für einen fest gewählten Bereich eindeutige Resultate liefern. Das dort unter dieser Annahme für den eindimensionalen Raum gewonnene Ergebnis habe ich geglaubt, hier nicht wiederholen zu sollen

[13]) VI § 4 S. 112. Man vergleiche § 2 der Arbeit: Zur projektiven Geometrie, math. Ann. B. 43. In vieler Hinsicht wäre es besser gewesen, die §§ 5 u. 6 dem § 4 vorangehen zu lassen; da aber in § 6 einige Sätze über Transformations-Gruppen nicht wohl entbehrt werden können, welche mit dem in § 4 gegebenen Beweise besonders eng zusammenhangen, so schien es angebracht, diesen voranzustellen.

[14]) VI § 7. S. 156. Amodeo, quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno S_r, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXVI.

Fano, sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, Giornale di matematiche, vol. XXX.

[15]) VII § 2. S. 171. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie unter Benutzung der Vorträge von Clebsch. B. 2, S. 547, 548.

Über den Inhalt dieses Paragraphen möchte ich noch bemerken, dafs manche Geometer glauben, die durch zwei Strahlen gebildete Figur nicht als Winkel bezeichnen zu dürfen, und deshalb dieser Figur einen eigenen Namen beilegen.

[16]) VII § 3. S. 181, 182, 183. Schotten, planimetrischer Unterricht B. 1, S. 261.

Crelle, Zur Theorie der Ebene (Journal für Math. B. 45).

Deahna, demonstratio theorematis, esse superficiem planam. Marburg 1837.

[17]) VII § 4. S. 190. Durch das hier angegebene Beispiel beweist Weierstrafs die Unrichtigkeit des sog. Dirichletschen Princips (Werke, B. 2, S. 49—54).

[18]) VII § 4. S. 190. Bettazzi, il concetto di lunghezza e la retta, annali di matem. Se II. T. XX.

[19]) VII § 6. S. 198. Wundt, Logik B. I. In den Darlegungen der ersten und der zweiten Auflage habe ich keinen wesentlichen Unterschied gefunden.

[20]) VII § 7. S. 204. Überweg, Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt; Archiv für Philologie und Pädagogik B. 17 (1851). Die französische Übersetzung, welche Delboeuf verfaſst und seinen Prolégomènes philosophiques de la géométrie (Liège 1860) beigegeben hat, führt den Titel: Exposition scientifique des principes de la géométrie, précédée d'une discussion sur le fondement de la certitude des propositions premières de cette science.

Wegen der beabsichtigten Neubearbeitung vergleiche man die Erinnerungen, welche Theod. Toeche der dritten Auflage des dritten Teiles von Überwegs Geschichte der Philosophie vorausschickt.

Die erwähnten Arbeiten von Helmholtz sind unter 30. angegeben.

[21]) VII § 8. S. 208. Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique, par J. M. de Tilly, Bordeaux 1879. Meine Bemerkung (math. Ann. B. 35, S. 430), Tillys Voraussetzungen kämen darauf hinaus, zu fordern, daſs die entsprechende Transformations-Gruppe eine einzige wesentliche Invariante zwischen zwei Punkten hätte, ist nicht zutreffend; als ich sie machte, war es mir unmöglich, die Arbeit selbst einzusehen. Das Bedenken Lies, die Forderung der Stetigkeit habe keine Berechtigung, ehe der Raum als Zahlenmannigfaltigkeit vorausgesetzt werde, kann ich als berechtigt nicht anerkennen.

[22]) VII § 9. S. 214. Das Werk Veroneses wurde unter 9. angegeben; man vergleiche die Besprechung durch Schönflies (Göttinger Anzeigen 1896). Für den Wortlaut habe ich geglaubt mich ganz an die Übersetzung des Herrn Schepp anschlieſsen zu sollen, auch da, wo ich eine andere Fassung gern vorgezogen hätte.

Wenn Veronese meint, Klein habe zuerst den Unterschied zwischen den beiden Formen des Riemannschen Raumes angegeben, so ist er in einem Irrtum, der um so weniger verstanden werden kann, da er meine beiden Arbeiten im 86. und 89. Bande des Journals erwähnt und auf Kleins Arbeit im 37. Bande der Annalen hinweist.

[23]) VIII § 1. S. 243. Nachdem Lie die Theorie der Transformations-Gruppen in zahlreichen Abhandlungen begründet hatte, hat er die Ergebnisse seiner Forschung in dem dreibändigen Werke: Theorie der Transformations-Gruppen, bei dessen Abfassung ihn Engel unterstützt hat, vereinigt (Leipzig 1888, 1890, 1893).

[24]) VIII § 3. S. 264. Über die Invarianten im weiteren Sinne vergleiche man S. 218—220 im ersten Bande von Lies Werk, sowie meine Arbeit: Erweiterung des Begriffs der Invarianten von Transformations-Gruppen (math. Annalen B. 35, S. 423 ff.).

[25]) VIII § 4. S. 270. Lie hat bereits in den Leipziger Berichten (Okt. 1890) und dann im dritten Bande seines groſsen Werkes alle Invarianten bestimmt, welche eine transitive Gruppe in drei Variabeln zwischen zwei Wertsystemen besitzen kann, falls alle ihre Invarianten auf eine einzige zurückgeführt werden können. Die vorliegende Aufgabe geht insofern weiter, als ich zulasse, daſs in der Gruppe noch andere Invarianten vorkommen; dagegen bestimme ich die Form der Invariante nur unter der Annahme, daſs die beiden

Wertsysteme unendlich wenig von einander verschieden sind, während Lie diese beschränkende Annahme nicht macht.

[26]) VIII § 6. S. 296. Die Aufgabe, alle Gruppen zu bestimmen, welche einer in den Differentialen quadratischen Gleichung genügen, hat Lie vor langem unter der Bedingung gelöst, dafs bei der Ruhe eines Punktes die von ihm ausgehenden Differentiale auf die allgemeinste Weise in einander transformiert werden; meine Herleitung geht von einer anderen Forderung aus.

Wenn wir auch in 15. die Behandlung einiger specieller Fälle dem Leser überlassen durften, so dürfte es doch angebracht sein, die entsprechenden Gruppen wenigstens mitzuteilen. Wir setzten bei unserer Herleitung voraus, dafs keine der Gröfsen c_α, $c_\alpha - \omega$, $c_\alpha + c_\beta - c_\gamma$, $c_\alpha + c_\beta - \omega$ gleich null ist. Damit aber eine dieser Gröfsen verschwindet, mufs a_0 entweder gleich -2ω oder $= -\omega$ oder $= \frac{\omega}{2}$ oder $= 2\omega$ oder $= \omega$ oder $= 0$ sein. Nun zeigt man leicht, dafs in den drei ersten Fällen die angegebene Form ungeändert bleibt. Für $a_0 = 2\omega$ gelten folgende Beziehungen:

$$(S'S) = \omega S',\ (Q_\nu S) = \nu\omega Q_\nu,\ (Q_1 S') = aQ_2,\ (Q_2 S') = -\omega Q_3,\ (Q_3 S') = 0,$$
$$(Q_2 Q_3) = 0,\ (Q_1 Q_3) = 0,\ (Q_1 Q_2) = 2bQ_3;$$

die Gruppe wird durch die fünf Transformationen erzeugt:

$$p_1 - 2bx_2p_3,\ p_2,\ p_3,\ \omega x_1 p_1 + 2\omega x_2 p_2 + 3\omega x_3 p_3,\ ax_1 p_2 + (\omega x_2 + abx_1^2)p_3.$$

Wird $a_0 = \omega$, so erhält man für die Kombinationen folgende Gesetze:

$$(Q_\nu S) = (\nu - 1)\omega Q_\nu,\ (Q_1 S') = aQ_2 + bS',\ (Q_2 S') = \omega Q_3,\ (Q_3 S') = 0,$$
$$(Q_2 Q_3) = 0,\ (Q_1 Q_2) = cQ_2 + 2eS',\ (Q_1 Q_3) = (c + b)Q_3.$$

Um die Komponenten der infinitesimalen Transformationen aufzustellen, beachte man, dafs S und S′ von der ersten Ordnung sind, also den Nullpunkt in Ruhe lassen; dadurch wird man auf folgende Ausdrücke geführt:

$$Q_3 = p_3,\ Q_2 = p_2,\ Q_1 = p_1 - (b + c)p_3x_3 - cp_2x_2 + \omega e x_2^2 p_2 - 2eAp_2x_2,$$
$$S = \omega p_2 x_2 + 2\omega p_3 x_3,\ S' = -\omega p_3 x_2 + Ap_2,$$

wo A eine blofse Funktion von x_1 ist, welche der Differentialgleichung genügt: $\frac{dA}{dx_1} + (c - b)A + 2eA^2 = a$, und für $x_1 = 0$ verschwindet.

Endlich ergeben sich für $a_0 = 0$ folgende Relationen:

$$(Q_\nu S) = (\nu - 2)\omega Q_\nu,\ (Q_1 S') = 2aQ_2,\ (Q_2 S') = -\omega Q_3,\ (Q_3 S') = 0,$$
$$(Q_2 Q_1) = bQ_1,\ (Q_3 Q_2) = bQ_3,\ (Q_1 Q_3) = \frac{2ab}{\omega}Q_2,$$

denen für $\omega = -1$ die Transformationen entsprechen:

$$Q_3 = p_3,\ Q_2 = p_2 + bx_3p_3,\ Q_1 = e^{bx_2}p_1 + 2abx_2p_3 + ab^2x_3^2p_3,$$
$$S = x_1p_1 - x_3p_3,\ S' = abx_1^2p_1 + 2ax_1p_2 + \frac{1}{b}(e^{bx_2} - 1)p_3.$$

Alle diese Gruppen haben die Eigenschaft, dafs bei der Ruhe des Nullpunktes die Ebene $x_1 = 0$ in sich bewegt wird; demnach brauchen wir in § 10 auf sie keine Rücksicht zu nehmen. Ebenso dürfen wir in § 10, 6 die zweite in § 6, 19 mitgeteilte Gruppe ausschliefsen, da erstens bei der Ruhe

des Nullpunktes die Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ in sich verschoben wird und zweitens die quadratische Form in zwei Faktoren zerfällt.

[27]) VIII § 7. S. 314. Über diejenigen Axiome, welche man durch Einführung der Koordinaten macht, handelt die unter 1. erwähnte Arbeit von Burkhardt.

[28]) VIII § 7. S. 315. Die folgende Darlegung ist eine Umarbeitung des ersten Paragraphen meiner Programmarbeit: Erweiterung des Raumbegriffes (Braunsberg 1884). Wenn ich auch auf die Kritik des Herrn Lie, die er an meinen Arbeiten ausübt, in ihren Einzelheiten nicht eingehen mag, da ich einerseits darin die (vielleicht unbewufste) Absicht sehen mufs, das von mir Geleistete zu verkleinern, andererseits einen Mann, der in Kleins Entdeckungen nur die Popularisierung eines Cayleyschen Gedankens erblickt, für einen kompetenten Beurteiler nicht halten kann, so mufs ich doch der Besprechung dieser Arbeit, bei deren Abfassung mir Lies Untersuchungen über die Transformations-Gruppen ganz unbekannt waren, einige Worte widmen. Die allgemeine Theorie des Raumes hatte mich auf die Transformations-Gruppen geführt, und es war mir gelungen, mehrere Grundgesetze der Theorie selbständig zu finden. Als mich Herr Klein auf Lies Arbeiten verwies, sah ich, dafs mir der norwegische Gelehrte nicht blofs in der Zeit vorangegangen war, sondern mich auch in der Bewältigung des Stoffes weit überholt hatte. In der Freude darüber, dafs hierdurch auch die allgemeine Theorie der Raumformen sehr gefördert war, erklärte ich, dafs der Inhalt mehrerer Paragraphen meiner Arbeit zuvor von Lie gefunden sei. Diese Erklärung war ungenau und mufste deshalb später dahin richtig gestellt werden, dafs einige darin enthaltene kleinere Einzelheiten zuerst von mir angegeben seien. So war dort der Satz mitgeteilt, dafs jede Gruppe, die von mehr als drei Parametern abhängt, vertauschbare Transformationen enthält. Für diesen Satz, der doch auch in meiner ersten Erklärung Herrn Lie beigelegt war, giebt dieser meine Priorität ausdrücklich zu. Von den übrigen darin enthaltenen, mir eigentümlichen Sätzen behauptet er aber, sie seien ausnahmslos falsch. Um das zu beweisen, ersetzt er das von mir gebrauchte Wort Raumform durch Transformations-Gruppe und stellt Gruppen auf, für welche die von ihm mitgeteilten, mir zugeschriebenen Sätze nicht gelten. Dieser Beispiele hätte es aber nicht bedurft; es genügte, darauf hinzuweisen, dafs die Sätze nur auf transitive Gruppen führen. Darin liegt aber auch der Grund für den Irrtum des Herrn Lie. Ich habe nirgends Raumformen und Transformations-Gruppen identifiziert, vielmehr ausdrücklich hervorgehoben, dafs zur Darstellung der Raumformen nur transitive Gruppen geeignet seien. Meine Sätze betreffen Raumformen, sollen also für intransitive Gruppen, aus denen Lie seine Beispiele entnimmt, gar nicht gelten. Dabei kann ich nur meine Freude darüber ausdrücken, dafs Lie die Sätze selbst jetzt noch nicht kennt, da ich glaube, dafs sie einige Wichtigkeit besitzen; für drei Variabele habe ich sie in VIII § 6, 18 wieder mitgeteilt.

[29]) VIII § 7. S. 324. Diese Beispiele sind von Lie angegeben, um die Unrichtigkeit gewisser von Helmholtz gemachten Angaben zu beweisen. Ich darf wohl erwähnen, dafs die Gleichung (27) auf S. 459 des dritten Bandes

von Lies Werk durch einen Druckfehler entstellt ist; die richtige Form findet man im vorliegenden Werke auf S. 327 unter (11).

[30]) VIII § 8 S. 329. Über die Grundlagen der Geometrie handelt Helmholtz aufser in einigen populär-wissenschaftlichen Vorträgen in den Abhandlungen:

a) Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie; Verhandlungen des naturhist.-mediz. Vereins zu Heidelberg, 1866.

b) Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen; Göttinger Nachrichten 1868.

c) Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, in englischer Übersetzung im »Mind« 1879 veröffentlicht.

Diese drei Aufsätze sind mit kleineren späteren Zusätzen in den zweiten Band der wissenschaftlichen Abhandlungen (S. 610—662) aufgenommen.

Die geometrischen und mechanischen Anschauungen Helmholtz' hat Königsberger vor kurzem in einer eigenen Schrift behandelt.

Lies Kritik findet man u. a. im dritten Bande seines grofsen Werkes.

[31]) VIII § 9. S. 335. Lies Untersuchungen sind zuerst in den Leipziger Berichten und dann im dritten Bande seiner Theorie der Transformations-Gruppen mitgeteilt.

[32]) VIII § 10. S. 340. Ich verweise auf meine Abhandlung: Über die Grundlagen der Geometrie, im 109. Bande des Journals. Die in dieser Arbeit angegebene Charakterisierung der eigentlichen Raumformen reicht nicht für jede Zahl von Dimensionen aus, wie das auf S. 346 mitgeteilte Beispiel zeigt; dafs mein Beweis nicht befriedigen konnte, hat bereits Lie hervorgehoben. Dabei bemerke ich, dafs mir bei ihrer Abfassung Lies in den Leipziger Berichten erschienene Arbeiten unbekannt waren, dafs wahrscheinlich auch seine letzte darauf bezügliche Arbeit (vom Okt. 1890) überhaupt noch nicht erschienen war.

Im gleichen Verlage ist früher erschienen:

Einführung in die Grundlagen der Geometrie.

Von **Dr. Wilhelm Killing,**

Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster.

Erster Band.

Mit 40 Figuren im Text. X u. 357 Seiten. gr. 8. ℳ 7,—.

Der Verfasser hat den dankenswerten Versuch unternommen, die in den letzten Jahrzehnten gemachten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten.

Der vorliegende I. Band zerfallt in vier gröfsere Abschnitte, welche die Berechtigung der nichteuklidischen Raumformen, die Grundlagen der projectiven Geometrie, die Erweiterungen auf Räume von *n* Dimensionen und die erst neuerdings von Clifford und Klein angegebenen Raumformen behandeln.

Der Leser wird mit Dank die vielen Anregungen und Belehrungen auf sich wirken lassen, die das Buch gewährt; insbesondere ist der mit Umsicht geschriebene Abschnitt über den mehrdimensionalen Raum geeignet, falsche Vorurteile zu zerstören.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. XXV.

Der Verfasser, der auf dem Gebiete der neuen Theorien bekanntlich selbst eine sehr umfangreiche Thätigkeit entwickelt, bietet dementsprechend auch in dem vorliegenden Buche viel Eigenes, sowohl in den Einzelheiten der Beweisführung, als auch in der ganzen Auffassung. Da hat es für den sachkundigen Leser in der That Interesse, namentlich im zweiten und im vierten Abschnitt die Behandlung des Stoffes durch den Verfasser mit der zu vergleichen, die in den natürlich vielfach benutzten Abhandlungen des Hauptvertreters der neuen Theorien, Felix Klein, zu Tage tritt. Selbstverständlich findet sich mannigfache Übereinstimmung mit dem Inhalt des bekannten anderen Werkes des Verfassers, über die nichteuklidischen Raumformen.

Was der vorliegenden Schrift ihr Gepräge giebt, das ist die Tendenz des Verfassers, sich zunächst innerhalb eines endlich begrenzten Gebietes zu halten, da der Raum als Ganzes nicht Gegenstand der unmittelbaren Erfahrung sein könne. Von dem unter dieser Beschränkung in den beiden ersten Abschnitten des Buches entwickelten geometrischen System aus sucht der Verfasser dann im vierten Abschnitt, unter Verwendung der Clifford-Kleinschen Ideen den Raum als Ganzes zu erfassen, resp. zu konstruieren.

Die Anerkennung, die die Behandlung des Stoffes im allgemeinen verdient, hebt den grundsätzlichen Widerspruch nicht auf, den ich gegen die modernen Raumtheorien überhaupt richte. Vielmehr bietet das vorliegende Buch eben vermöge der Durchsichtigkeit seiner Darstellung eine passende Handhabe, die Schwächen dieser Theorien in ein helles Licht zu rücken, wobei auch manche Unklarheit in den Einzelheiten der Killingschen Beweisführung ihre Beleuchtung finden wird.

Zeitschrift für mathemat. u. naturw. Unterricht. 26. Jahrg.

Denn trotz der wichtigen und weitgreifenden Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, welche nun schon Jahrzehnte zurückreichen, gab es noch kein Werk, welches diese neue Disciplin der Mathematik im Zusammenhange behandelt hätte. — Der Verfasser hat sich bemüht, dem Leser das Verständnis des oft schwierigen Textes möglichst zu erleichtern; einmal wird jeder Gegenstand von principieller Bedeutung von den verschiedensten Punkten aus beleuchtet, sodann wird am Schlusse jedes Hauptabschnittes ein faslicher Überblick über die gewonnenen Ergebnisse gegeben. Auch das den Schlufs bildende Litteraturregister ist sehr dankenswert.

Die Darstellung des Textes ist im ganzen anzuerkennen. Im Übrigen bemüht sich der Verfasser mit Erfolg, den mannigfachen Vorurteilen und falschen Ansichten, die gerade dieses Gebiet zu einem Tummelplatze von Streitigkeiten von jeher gemacht haben, entgegen zu treten.

Zeitschrift für Mathem. u. Physik. 40. Jahrg. 1895. 3. Heft.

Die Vorlage wird von Niemanden entbehrt werden können, der sich mit den nicht-euklidischen Raumformen vertraut machen will. Die sorgfältige Angabe der Originalarbeiten wird dem Leser, der eine hier noch nicht gelöste Frage zu beantworten strebt, gute Dienste leisten. **Blätter für das Gymnasialschulwesen.**

Es kann jedem, der sich mit diesem interessanten Teil der Mathematik beschäftigt, nur erwünscht sein, dafs er hier die wichtigsten Theorien vereinigt und mehr oder weniger mit einander verglichen findet; für die Hauptsätze sind mehrere von einander unabhängige Entwickelungen und Beweise gegeben, und wer weiter auf das Einzelne eingehen will, findet die nötigen Litteraturnotizen angegeben.

Central-Organ f. d. Interessen des Realschulwesens. 1895. 12. Heft.

1.10

FRITZ GÄHR Buchbinde
F. X. Beer Nachfolger
MÜNCHEN
Weinstrasse N° 18/II

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Killing, Wilhelm

Einführung in die Grundlagen der Geometrie

Bd.: 2

1898

Math.p. 253 le-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11867846-0